

Dedicated to the memory of
professor N.M. Korobov.

A reinforcement of the Bourgain-Kontorovich's theorem by elementary methods.

D. A. Frolenkov* I. D. Kan,[†]

УДК

Аннотация

Recently (in 2011) several new theorems concerning this conjecture were proved by Bourgain and Kontorovich. The easiest of them states that the set of numbers satisfying Zaremba's conjecture with $A = 50$ has positive proportion in \mathbb{N} . The proof of this theorem is rather complicated and refers to the spectral theory. In this paper, using only elementary methods, the same theorem is proved with $A = 13$.

Bibliography: 17 titles.

Keywords: continued fraction, continuant, exponential sums, Kloosterman sums.

1 Introduction

Let \mathfrak{R}_A be the set of rational numbers whose continued fraction expansion has all partial quotients being bounded by A . Let \mathfrak{D}_A be the set of denominators of numbers in \mathfrak{R}_A : $\mathfrak{D}_A = \left\{ d \mid \exists b : (b, d) = 1, \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_A \right\}$. And set

$$\mathfrak{D}_A(N) = \left\{ d \in \mathfrak{D}_A \mid d \leq N \right\}.$$

Conjecture 1.1. (*Zaremba's conjecture* [1, p. 76], 1971). For sufficiently large A one has

$$\mathfrak{D}_A = \mathbb{N}.$$

Let $\mathcal{A} \in \mathbb{N}$ be any finite alphabet ($|\mathcal{A}| \geq 2$) and let $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ and $\mathfrak{C}_{\mathcal{A}}$ be the set of finite and infinite continued fractions whose partial quotients belong to \mathcal{A} . And let

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) = \left\{ d \mid d \leq N, \exists b : (b, d) = 1, \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \right\}$$

be the set of denominators bounded by N . Let $\delta_{\mathcal{A}}$ be the Hausdorff dimension of the set $\mathfrak{C}_{\mathcal{A}}$ (another definition of $\delta_{\mathcal{A}}$ will be given below in §10). In the article [3], using the method, developed by Bourgain-Kontorovich in [2], as the base the following theorem was proved

*Research is supported by RFFI (grant № 11-01-00759-a)

[†]Research is supported by RFFI РФФИ (grant № 12-01-00681-a)

Theorem 1.1. *For any alphabet \mathcal{A} with*

$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{27 - \sqrt{633}}{16} = 0,8849\dots, \quad (1.1)$$

the following inequality (positive proportion) holds

$$\#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) \gg N. \quad (1.2)$$

Remark 1.1. *It is proved [12] that $\delta_7 = 0,8889\dots$. From this follows that the alphabet $\{1, 2, \dots, 7\}$ satisfies the condition of Theorem 1.1. It is also proved in [12] that for the alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, 6, 8\}$ one has $\delta_{\mathcal{A}} = 0,8851\dots$. Consequently, the alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, 6, 8\}$ also satisfies the condition of Theorem 1.1.*

Note that the Theorem 1.1 is based on the Lemma 7.1 in the paper [2], which we are going to state next. To begin with we describe all necessary objects.

Let $K, X, Y \geq 1$ be real numbers and q be a positive integer. Moreover, let $\eta = (x, y)^t, \eta' = (u, v)^t \in \mathbb{Z}^2$ be vectors such as

$$|\eta| \asymp \frac{X}{Y}, |\eta'| \asymp X, (x, y) = 1, (u, v) = 1.$$

Lemma 1.1. (*[2, p. 46, Lemma 7.1.]*) *If the following inequality*

$$(qK)^{\frac{13}{5}} < Y < X, \quad (1.3)$$

holds, then

$$\#\left\{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \|\gamma\| \asymp Y, |\gamma\eta - \eta'| < \frac{X}{K}, \gamma\eta \equiv \eta' \pmod{q}\right\} \ll \frac{Y^2}{(qK)^2}. \quad (1.4)$$

The proof of Lemma 1.1 given in the article [2] is based on the paper [4]. In [4] using the spectral theory of automorphic forms statements similar to Lemma 1.1 are proved. However, the main purpose of this article is to present an elementary proof of the Bourgain-Kontorovich's result. This accounts for the fact that we prefer not to use Lemma 1.1 in the proof of our main Theorem 1.2. Instead of it we use another result, although a weaker one, obtained in our paper with the use of the estimates of Kloosterman sums. We note that the problem of obtaining an elementary proof of the Bourgain-Kontorovich's theorem was stated by Moshchevitin in [17]. The main result of the paper is the following theorem.

Theorem 1.2. *For any alphabet \mathcal{A} with*

$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{1}{9 + \sqrt{61}} = 0,9405\dots, \quad (1.5)$$

the following inequality (positive proportion) holds

$$\#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) \gg N. \quad (1.6)$$

Remark 1.2. *It is proved [12] that $\delta_{13} = 0,9445\dots$. From this follows that the alphabet $\{1, 2, \dots, 2, 13\}$ satisfies the condition of Theorem 1.2.*

This article is a continuation of our paper [3]. So we will heavily refer to statements and constructions in [3]. It should be mentioned that the proof of the Theorem 1.2 repeats significantly the proof of the Theorem 1.1 in [3].

In sections 10 and 11 an important accessory Theorem 6.1. from [3] will be proved.

2 Обозначения

В дальнейшем $\epsilon_0 = \epsilon_0(\mathcal{A}) \in (0, \frac{1}{1000})$. Для двух функций $f(x), g(x)$ используемый знак Виноградова $f(x) \ll g(x)$, означает существование константы C , зависящей от A, ϵ_0 , такой что $|f(x)| \leq Cg(x)$. Аналогичный смысл имеет обозначение $f(x) = O(g(x))$. Случай обоюдной оценки $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$ обозначается стандартным образом $f(x) \asymp g(x)$. Используется также традиционное обозначение $e(x) = \exp(2\pi i x)$. Мощность конечного множества S обозначается через $|S|$ или $\#S$. Через $[\alpha]$ и $\|\alpha\|$ для действительных чисел α обозначаются, соответственно, целая часть числа α и расстояние от α до ближайшего целого:

$$[\alpha] = \max \{z \in \mathbb{Z} | z \leq \alpha\},$$

$$\|\alpha\| = \min \left\{ |z - \alpha| \mid z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Обозначим, следуя Н.М. Коробову, через $\delta_q(a)$ характеристическую функцию делимости на натуральное число q :

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q} \sum_{x=1}^q \exp \left(2\pi i \frac{ax}{q} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Обозначим через $\sigma_\alpha(q)$ следующую сумму $\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha$.

3 Благодарности

Мы благодарим профессора Н.Г. Мошечитина за неоднократное обсуждение наших результатов. Именно он обратил наше внимание на статью [2]. Мы также выражаем благодарность И.Д. Шкрёдову и И.С. Резвяковой за вопросы и комментарии во время наших докладов.

4 Оценки сумм Клоостермана и их применение.

Для натурального q и целых l, m, n следуя Устинову [14], определим суммы Клоостермана следующим образом:

$$K_q(l, m, n) = \sum_{x, y=1}^q \delta_q(xy - l) e \left(\frac{mx + ny}{q} \right), \quad (4.1)$$

где $\delta_q(x)$ определена в (2.1). При $l = 1$ это определение совпадает с классическим определением сумм Клоостермана

$$K_q(m, n) = K_q(1, m, n) = \sum_{x, y=1}^q \delta_q(xy - 1) e \left(\frac{mx + ny}{q} \right). \quad (4.2)$$

Для классических сумм Клоостермана Эстерманом [13] было доказано неравенство

$$|K_q(m, n)| \leq \sigma_0(q)(m, n, q)^{1/2} \sqrt{q}. \quad (4.3)$$

Мы же будем использовать следующий результат, полученный Устиновым [14].

Lemma 4.1. (*Устинов [14]*) Пусть q – натуральное, l, m, n – целые, тогда

$$|K_q(l, m, n)| \leq f_q(l, m, n)\sqrt{q}, \quad (4.4)$$

где

$$f_q(l, m, n) = \sigma_0(q)\sigma_0((l, m, n, q))(lm, ln, mn, q)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Remark 4.1. Используя оценку

$$\sigma_0(q) \ll_\epsilon q^\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

из (4.5) получаем неравенство

$$f_q(l, m, n) \ll q^\epsilon(l, q)^\epsilon(lm, ln, mn, q)^{1/2}, \quad (4.6)$$

которое мы и будем использовать.

Lemma 4.2. (*Устинов [14]*) Пусть q – натуральное, Q_1, Q_2, P_1, P_2 – вещественные, $0 \leq P_1, P_2 \leq q$, тогда для суммы

$$\Phi_q^{(0)}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \sum_{\substack{Q_1 < u \leq Q_1 + P_1 \\ Q_2 < v \leq Q_2 + P_2}} \delta_q(uv \pm 1) \quad (4.7)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_q^{(0)}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \frac{\varphi(q)}{q^2} P_1 P_2 + O(\psi_1(q)), \quad (4.8)$$

где

$$\psi_1(q) = \sigma_0(q) \log^2(q+1)q^{1/2}. \quad (4.9)$$

Следующий результат является уточнением аналогичного результата Устинова [14].

Lemma 4.3. Пусть q – натуральное, Q_1, Q_2 – вещественные $0 \leq Q_1, Q_2 \leq q$, $f(u)$ – невозрастающая функция на отрезке $[0; q]$ и $f(0) \leq q$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{Q_1 < u \leq Q_2} \sum_{0 < v \leq f(u)} \delta_q(uv \pm 1) &= \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{Q_1}^{Q_2} f(u) du + \\ &+ O\left(\frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{Q_2 - Q_1}{T} (f(Q_1) - f(Q_2))\right) + O(T\psi_1(q)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где T – любое натуральное число.

Доказательство. Разобьем отрезок $[Q_1; Q_2]$ на T частей

$$[u_{j-1}, u_j], \quad j = 1, \dots, T, \quad \text{где} \quad u_j = Q_1 + j \frac{Q_2 - Q_1}{T}, \quad j = 0, 1, \dots, T.$$

Обозначим

$$S_j = \sum_{u_{j-1} < u \leq u_j} \sum_{0 < v \leq f(u)} \delta_q(uv \pm 1), \quad j = 1, \dots, T.$$

Заметим, что

$$\sum_{Q_1 < u \leq Q_2} \sum_{0 < v \leq f(u)} \delta_q(uv \pm 1) = \sum_{j=1}^T S_j. \quad (4.11)$$

Ввиду не возрастания функции $f(u)$ на отрезке $[0; q]$, получаем:

$$\sum_{u_{j-1} < u \leq u_j} \sum_{0 < v \leq f(u_j)} \delta_q(uv \pm 1) \leq S_j \leq \sum_{u_{j-1} < u \leq u_j} \sum_{0 < v \leq f(u_{j-1})} \delta_q(uv \pm 1). \quad (4.12)$$

Применяя к левой и правой части неравенства (4.12) лемму 4.2, получаем:

$$\frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_j) + O(\psi_1(q)) \leq S_j \leq \frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_{j-1}) + O(\psi_1(q)). \quad (4.13)$$

Суммируя (4.13) по $j = 1, \dots, T$, получаем:

$$\frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{j=1}^T \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_j) + TO(\psi_1(q)) \leq \sum_{j=1}^T S_j \leq \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{j=1}^T \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_{j-1}) + TO(\psi_1(q)). \quad (4.14)$$

Ввиду не возрастания функции $f(u)$ на отрезке $[0; q]$, получаем:

$$\sum_{j=1}^T \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_j) \leq \int_{Q_1}^{Q_2} f(u) du \leq \sum_{j=1}^T \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_{j-1}) \quad (4.15)$$

и

$$\sum_{j=1}^T \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_{j-1}) - \sum_{j=1}^T \frac{Q_2 - Q_1}{T} f(u_j) = \frac{Q_2 - Q_1}{T} (f(Q_1) - f(Q_2)). \quad (4.16)$$

Следовательно, из (4.14) и соотношений (4.15), (4.16) получаем:

$$\sum_{j=1}^T S_j = \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{Q_1}^{Q_2} f(u) du + O\left(\frac{\varphi(q)}{q^2} \frac{Q_2 - Q_1}{T} (f(Q_1) - f(Q_2))\right) + O(T\psi_1(q)). \quad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в (4.11), получаем (4.10). Лемма доказана. \square

Докажем две леммы, обобщающие лемму 4.2. Их доказательство идейно повторяет доказательство леммы 4.2 [14]. В дальнейшем запись вида $\sum'_{-s/2 < m \leq s/2}$ означает, что суммирование ведется по $m \neq 0$.

Lemma 4.4. Пусть q, d, k – натуральные, $s = qd$, Q_1, Q_2, P_1, P_2 – вещественные, $0 \leq P_1 \leq d$, $0 \leq P_2 \leq s$, тогда для суммы

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \sum_{\substack{Q_1 < u \leq Q_1 + P_1 \\ Q_2 < v \leq Q_2 + P_2}} \delta_s(uv \pm q) \delta_q(v) e\left(\frac{k}{q}u\right) \quad (4.18)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \frac{P_1 P_2}{q s^2} \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dk) + O\left(\sum_{j=0}^3 R_j(k)\right), \quad (4.19)$$

где

$$R_0(k) = \frac{1}{qs} \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dk) \right|, \quad (4.20)$$

$$R_1(k) = \frac{1}{q^2} \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \frac{1}{|m|} \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, m + dl, dk) \right|, \quad (4.21)$$

$$R_2(k) = \frac{1}{q} \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \frac{1}{|n|} \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, n + dk) \right|, \quad (4.22)$$

$$R_3(k) = \frac{1}{q} \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \frac{1}{|mn|} \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, m + dl, n + dk) \right|. \quad (4.23)$$

Доказательство. Положим

$$M_1 = [Q_1], \quad N_1 = [Q_1 + P_1] - [Q_1], \quad M_2 = [Q_2], \quad N_2 = [Q_2 + P_2] - [Q_2],$$

тогда

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2).$$

Очевидно, что

$$N_j = P_j - \{Q_j + P_j\} + \{Q_j\}, \quad j = 1, 2 \quad (4.24)$$

и, следовательно $0 \leq N_1 \leq d$, $0 \leq N_2 \leq s$. Определим две характеристические функции для $M_j < x \leq M_j + s$, $j = 1, 2$:

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } M_j < x \leq M_j + N_j; \\ 0, & \text{если } M_j + N_j < x \leq M_j + s. \end{cases} \quad (4.25)$$

Тогда их разложение в конечный ряд Фурье имеет следующий вид:

$$\chi_j(x) = \sum_{-s/2 < n \leq s/2} \hat{\chi}_j(n) e\left(\frac{nx}{s}\right), \quad \text{где} \quad \hat{\chi}_j(n) = \frac{1}{s} \sum_{x=M_j+1}^{M_j+N_j} e\left(\frac{-nx}{s}\right). \quad (4.26)$$

При $-\frac{s}{2} < n \leq \frac{s}{2}$, $n \neq 0$, после суммирования геометрической прогрессии получаем:

$$|\hat{\chi}_j(n)| = \frac{1}{s} \frac{|1 - e(\frac{nN_j}{s})|}{|1 - e(\frac{n}{s})|} \leq \frac{1}{s} \frac{1}{|\sin(\pi n/s)|} \leq \frac{1}{2|n|}. \quad (4.27)$$

Следовательно,

$$\hat{\chi}_j(0) = \frac{N_j}{s}, \quad |\hat{\chi}_j(n)| \leq \frac{1}{2|n|} \quad \text{при} \quad -\frac{s}{2} < n \leq \frac{s}{2}, \quad n \neq 0. \quad (4.28)$$

Из определения (4.25) функций $\chi_j(x)$, $j = 1, 2$, следует, что

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2) = \sum_{u=M_1+1}^{M_1+s} \sum_{v=M_2+1}^{M_2+s} \delta_s(uv \pm q) \delta_q(v) \chi_1(u) \chi_2(v) e\left(\frac{k}{q}u\right). \quad (4.29)$$

Подставляя в (4.29) разложения в ряд Фурье функций $\chi_1(u)$, $\chi_2(v)$, (см. (4.26)), получаем:

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2) = \sum_{-s/2 < m, n \leq s/2} \hat{\chi}_1(n) \hat{\chi}_2(m) \sum_{u=1}^s \sum_{v=1}^s \delta_s(uv \pm q) \delta_q(v) e\left(\frac{nu + mv}{s}\right) e\left(\frac{k}{q}u\right).$$

Используя определение (2.1), получаем:

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2) = \frac{1}{q} \sum_{-s/2 < m, n \leq s/2} \hat{\chi}_1(n) \hat{\chi}_2(m) \sum_{l=1}^q \sum_{u=1}^s \sum_{v=1}^s \delta_s(uv \pm q) e\left(\frac{nu + mv}{s} + \frac{ku}{q} + \frac{lv}{q}\right).$$

По условию $s = qd$, следовательно,

$$\frac{nu + mv}{s} + \frac{ku}{q} + \frac{lv}{q} = \frac{(n + dk)u + (m + dl)v}{s}. \quad (4.30)$$

Используя (4.30) и определение (4.1), получаем:

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2) = \frac{1}{q} \sum_{-s/2 < m, n \leq s/2} \hat{\chi}_1(n) \hat{\chi}_2(m) \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, m + dl, n + dk).$$

Выделяя слагаемое с $m = n = 0$ и слагаемые с $m = 0$ или $n = 0$, используя (4.28), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2) &= \frac{N_1 N_2}{qs^2} \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dk) + \frac{N_1}{qs} \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \hat{\chi}_2(m) \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, m + dl, dk) + \\ &+ \frac{N_2}{qs} \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \hat{\chi}_1(n) \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, n + dk) + \\ &+ \frac{1}{q} \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \hat{\chi}_1(n) \hat{\chi}_2(m) \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, m + dl, n + dk). \end{aligned}$$

Из (4.24) следует, что $P_j - 1 \leq N_j \leq P_j + 1$ для $j = 1, 2$. Используя это и оценки коэффициентов Фурье из (4.28), получаем

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2) = \frac{N_1 N_2}{qs^2} \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dk) + O(R_1(k)) + O(R_2(k)) + O(R_3(k))$$

Далее, так как

$$|P_1 P_2 - N_1 N_2| = |P_1(P_2 - N_2) + N_2(P_1 - N_1)| \leq P_1 + N_2 \leq P_1 + P_2 + 1 \ll s,$$

то получаем:

$$\Phi_{s,q,k}^{(1)}(M_1, M_2; N_1, N_2) = \frac{P_1 P_2}{q s^2} \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dk) + O\left(\sum_{j=0}^3 R_j(k)\right).$$

Лемма доказана. \square

Следующая лемма является обобщением леммы 4.3.

Lemma 4.5. Пусть q, d, k – натуральные, $s = qd$. Пусть Q_1, Q_2 – вещественные, $0 \leq Q_1, Q_2 \leq d$, $f(u)$ – невозрастающая функция на отрезке $[0; s]$ и $f(0) \leq s$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{Q_1 < u \leq Q_2} \sum_{0 < v \leq f(u)} \delta_s(uv \pm q) \delta_q(v) e\left(\frac{k}{q}u\right) &= \frac{1}{q s^2} \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dk) \int_{Q_1}^{Q_2} f(u) du + \\ + O\left(\frac{1}{q s^2} \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dk) \right| \frac{Q_2 - Q_1}{T} (f(Q_1) - f(Q_2))\right) &+ O\left(T \sum_{j=0}^3 R_j(k)\right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

где T – любое натуральное число, а величины $R_0(k), R_1(k), R_2(k), R_3(k)$ определены в (4.20) – (4.23), соответственно.

Доказательство. Доказательство этой леммы, опирающееся на лемму 4.4, дословно повторяет вывод леммы 4.3 из леммы 4.2. \square

Remark 4.2. Утверждение, аналогичное лемме 4.4, может быть доказано для сумм следующего вида

$$\Phi_{s,q,k}^{(2)}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) = \sum_{\substack{Q_1 < u \leq Q_1 + P_1 \\ Q_2 < v \leq Q_2 + P_2}} \delta_s(uv \pm q^2) \delta_q(u) \delta_q(v) e\left(\frac{p}{q^2}u + \frac{t}{q^2}v\right), \quad (4.32)$$

где $s = q^2 d$. На основе (4.32) может быть получена формула, аналогичная (4.31), для следующей суммы:

$$\sum_{Q_1 < u \leq Q_2} \sum_{0 < v \leq f(u)} \delta_s(uv \pm q^2) \delta_q(u) \delta_q(v) e\left(\frac{p}{q^2}u + \frac{t}{q^2}v\right). \quad (4.33)$$

5 Видоизменение леммы 1.1.

Пусть даны $X > Y > 0$, $K > 0$ – вещественные, $q \asymp Q$ – натуральное. Пусть так же даны два вектора

$$\eta = (x, y)^t, \quad \eta' = (u, v)^t$$

с натуральными координатами, удовлетворяющими соотношениям

$$\frac{y}{A} \leq x \leq y, \quad \frac{X}{Y} \ll y \ll \frac{X}{Y}, \quad (x, y) = 1 \quad (5.1)$$

$$\frac{v}{A} \leq u \leq v, \quad X \ll v \ll X, \quad \frac{2X}{K} \leq v, \quad (u, v) = 1, \quad (5.2)$$

причем все константы в знаках \ll – абсолютные. Рассмотрим множество матриц

$$M = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid 0 \leq a \leq b, 1 \leq c \leq d, 1 \leq b \leq d, \det \gamma = 1 \right\}. \quad (5.3)$$

В данном параграфе речь пойдет об оценке мощности множества матриц

$$\mathfrak{M} = \left\{ \gamma \in M \mid |\gamma\eta - \eta'| \leq \frac{X}{K}, \gamma\eta \equiv \eta' \pmod{q}, \frac{Y}{\kappa_1} \leq \|\gamma\| \leq Y \right\}, \quad (5.4)$$

где κ_1 –какая-либо константа. Рассмотрим подробнее условия на $\gamma \in \mathfrak{M}$. Условие $|\gamma\eta - \eta'| \leq \frac{X}{K}$ равносильно:

$$-\frac{X}{K} < ax + by - u < \frac{X}{K}, \quad -\frac{X}{K} < cx + dy - v < \frac{X}{K}.$$

По определению, $\|\gamma\| = d$, следовательно, мощность множества \mathfrak{M} не превосходит числа решений (a, b, c, d) системы

$$\begin{cases} -\frac{X}{K} < ax + by - u < \frac{X}{K}, \\ -\frac{X}{K} < cx + dy - v < \frac{X}{K}, \\ ax + by \equiv u \pmod{q}, \\ cx + dy \equiv v \pmod{q}, \\ \frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y, \\ \gamma \in M. \end{cases} \quad (5.5)$$

Так как $\gamma \in M$, то $\det \gamma = ad - bc = 1$ и, следовательно,

$$a = \frac{bc + 1}{d}, \quad d \mid (bc + 1).$$

Подставляя a в первое неравенство системы (5.5), получаем:

$$-d\frac{X}{K} < b(cx + dy) + x - du < d\frac{X}{K}.$$

Далее,

$$d\left(u - \frac{X}{K}\right) - x < b(cx + dy) < d\left(u + \frac{X}{K}\right) - x.$$

Из определения множества M получаем, что $c > 0$, $d > 0$; ввиду того что у вектора $\eta = (x, y)^t$ натуральные координаты, получаем $0 < cx + dy$, следовательно

$$\frac{d\left(u - \frac{X}{K}\right) - x}{cx + dy} < b < \frac{d\left(u + \frac{X}{K}\right) - x}{cx + dy}. \quad (5.6)$$

Из второго неравенства системы (5.5) получаем:

$$\frac{\left(v - \frac{X}{K}\right) - dy}{x} < c < \frac{d\left(v + \frac{X}{K}\right) - dy}{x}. \quad (5.7)$$

Обозначим:

$$c_1 = \frac{(v - \frac{X}{K}) - dy}{x}, \quad c_2 = \frac{d(v + \frac{X}{K}) - dy}{x}, \quad (5.8)$$

$$f_1(c) = \frac{d(u - \frac{X}{K}) - x}{cx + dy}, \quad f_2(c) = \frac{d(u + \frac{X}{K}) - x}{cx + dy}. \quad (5.9)$$

Теперь система (5.5) принимает вид:

$$\begin{cases} c_1 < c < c_2, \quad 1 \leq c \leq d, \\ f_1(c) < b < f_2(c), \quad 1 \leq b \leq d \\ ax + by \equiv u \pmod{q}, \\ cx + dy \equiv v \pmod{q}, \\ a = \frac{bc+1}{d}, \quad d|(bc+1), \\ \frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y. \end{cases} \quad (5.10)$$

Две первые строки этой системы задают область

$$\Theta = \left\{ (c, b) \left| \tilde{c}_1 < c < \tilde{c}_2, \tilde{f}_1(c) < b < \tilde{f}_2(c) \right. \right\}, \quad (5.11)$$

причем функции $\tilde{f}_1(c)$, $\tilde{f}_2(c)$ не возрастают на отрезке $[\tilde{c}_1; \tilde{c}_2]$. В дальнейшем мы часто будем использовать следующие обозначения:

$$I_c = [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2], \quad I_b = [\tilde{f}_1(c), \tilde{f}_2(c)]. \quad (5.12)$$

Мы оценим $|\Theta|$ следующим образом:

$$|\Theta| \leq \int_{c_1}^{c_2} (f_2(s) - f_1(s)) ds.$$

Подставляя $c_1, c_2, f_1(c), f_2(c)$ из (5.8) и (5.9), производя замену $z = sx + dy$, получаем:

$$|\Theta| \leq \int_{c_1}^{c_2} \frac{2d\frac{X}{K}}{sx + dy} ds = 2d\frac{X}{K} \int_{v-\frac{X}{K}}^{v+\frac{X}{K}} \frac{1}{xz} dz = 2d\frac{X}{K} \frac{1}{x} \log \frac{1 + \frac{X}{vK}}{1 - \frac{X}{vK}}. \quad (5.13)$$

Ввиду того, что

$$\log \frac{1+z}{1-z} \ll z, \quad \text{при } 0 < z < 1,$$

а $0 < \frac{X}{vK} \leq \frac{1}{2}$, получаем:

$$|\Theta| \ll d \frac{X^2}{K^2} \frac{1}{vx}.$$

Ввиду (5.1) и (5.2) получаем:

$$|\Theta| \ll d \frac{Y}{K^2}. \quad (5.14)$$

Заметим, что

$$\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 \leq c_2 - c_1 = \frac{X}{K} \frac{2}{x} \ll \frac{Y}{K}, \quad (5.15)$$

где в последнем переходе мы воспользовались (5.1). Нам так же необходимо оценить разности $\tilde{f}_i(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_i(\tilde{c}_2)$. Оценим $\tilde{f}_i(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_i(\tilde{c}_2)$ следующим образом:

$$\tilde{f}_i(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_i(\tilde{c}_2) \leq f_i(c_1) - f_i(c_2), \quad i = 1, 2. \quad (5.16)$$

Ввиду (5.8) и (5.9) получаем:

$$f_1(c_1) = \frac{d(u - \frac{X}{K}) - x}{v - \frac{X}{K}}, \quad f_1(c_2) = \frac{d(u - \frac{X}{K}) - x}{v + \frac{X}{K}}.$$

Следовательно,

$$f_1(c_1) - f_1(c_2) = \frac{d(u - \frac{X}{K}) - x}{v^2 - \frac{X^2}{K^2}} \frac{2X}{K} \leq \frac{2dX}{K} \frac{v}{v^2 - \frac{X^2}{K^2}} \leq \frac{2dX}{K} \frac{1}{v - \frac{X}{K}}.$$

Используя (5.1) и (5.2), получаем:

$$f_1(c_1) - f_1(c_2) \ll \frac{d}{K}. \quad (5.17)$$

Совершенно аналогично получаем:

$$f_2(c_1) - f_2(c_2) \ll \frac{d}{K}. \quad (5.18)$$

Подставляя (5.17) и (5.18) в (5.16), получаем:

$$\tilde{f}_i(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_i(\tilde{c}_2) \ll \frac{d}{K}, \quad i = 1, 2. \quad (5.19)$$

Теперь все готово для того, чтобы оценить мощность множества \mathfrak{M} .

Theorem 5.1. *Если $X > Y > K^4 q^3$, то для любого $\epsilon > 0$ справедлива следующая оценка мощности множества \mathfrak{M} :*

$$|\mathfrak{M}| \ll_{\epsilon} \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} \frac{q^{\epsilon}}{\sqrt{q}}. \quad (5.20)$$

Доказательство. Очевидно, что число решений системы (5.10) не превосходит числа решений $\mathfrak{S} = S(u, v, x, y, q)$ следующей системы:

$$\begin{cases} c_1 < c < c_2, 1 \leq c \leq d, \\ f_1(c) < b < f_2(c), 1 \leq b \leq d \\ cx + dy \equiv v \pmod{q}, \\ d | (bc + 1), \\ \frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y, \end{cases} \quad (5.21)$$

в переменных (b, c, d) . Чтобы не вводить дополнительных обозначений для остатков от деления x, y, v на q , будем считать, что $0 < x, y, v \leq q$. Обозначим

$$\alpha_1 = (q, x), \quad \alpha_2 = (q, v), \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1, \alpha_2)}. \quad (5.22)$$

Так как $dy - v \equiv -cx \pmod{q}$, то $\alpha_1 | (dy - v)$. Ввиду $(x, y) = 1$ получаем $(\alpha_1, y) = 1$. Тогда из $dy \equiv v \pmod{\alpha_1}$ следует, что $d \equiv v' \pmod{\alpha_1}$, где $0 < v' \leq \alpha_1$. Поэтому число решений системы (5.21) равно

$$\mathfrak{S} = \sum_{\substack{Y \\ \kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d - v') \sum_{c \in I_c} \sum_{b \in I_b} \delta_d(bc + 1) \delta_q(cx + dy - v). \quad (5.23)$$

Так как

$$\delta_q(cx + dy - v) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q e\left(\frac{cx + dy - v}{q} k\right),$$

то из (5.23) получаем, что

$$\mathfrak{S} \leq \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \sum_{\substack{Y \\ \kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d - v') \left| \sum_{c \in I_c} \sum_{b \in I_b} \delta_d(bc + 1) e\left(\frac{kx}{q} c\right) \right|. \quad (5.24)$$

Если $bc \equiv -1 \pmod{d}$, то $(qb)c \equiv -q \pmod{qd}$. Положив $s = qd$, получаем:

$$\sum_{c \in I_c} \sum_{b \in I_b} \delta_d(bc + 1) e\left(\frac{kx}{q} c\right) = \sum_{c \in I_c} \sum_{b \in qI_b} \delta_s(bc + q) \delta_q(b) e\left(\frac{kx}{q} c\right). \quad (5.25)$$

Учитывая, что $I_c = [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$, $qI_b = [q\tilde{f}_1(c), q\tilde{f}_2(c)]$, применяем лемму 4.5 с k равным kx , получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{c \in I_c} \sum_{b \in I_b} \delta_d(bc + 1) e\left(\frac{kx}{q} c\right) &= \sum_{c \in I_c} \sum_{b \in qI_b} \delta_s(bc + q) \delta_q(b) e\left(\frac{kx}{q} c\right) = \\ &= \frac{1}{qs^2} \sum_{l=1}^q K_s(q, dl, dkx) \int_{\tilde{c}_1}^{\tilde{c}_2} (q\tilde{f}_2(s) - q\tilde{f}_1(s)) ds + \\ &+ O\left(\frac{1}{qs^2} \left| \sum_{l=1}^q K_s(q, dl, dkx) \right| \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1}{T} (q\tilde{f}_1(c) - q\tilde{f}_2(c))\right) + O\left(T \sum_{j=0}^3 R_j(kx)\right). \end{aligned}$$

Из определения Θ и оценки (5.14) получаем:

$$\frac{1}{q} \int_{\tilde{c}_1}^{\tilde{c}_2} (q\tilde{f}_2(s) - q\tilde{f}_1(s)) ds = |\Theta| \ll d \frac{Y}{K^2}. \quad (5.26)$$

Подставляя в (5.1) оценки из (5.26), (5.15) и (5.19), получаем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{c \in I_c} \sum_{b \in I_b} \delta_d(bc \pm 1) e\left(\frac{kx}{q} c\right) \right| &\ll \frac{d}{s^2} \frac{Y}{K^2} \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, dl, dkx)| + \\ &+ O\left(\frac{1}{s^2} \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dkx) \right| \frac{dY}{TK^2}\right) + O\left(T \sum_{j=0}^3 R_j(kx)\right). \end{aligned}$$

Подставляя (5.1) в (5.24), получаем, что число решений системы (5.21) не превосходит

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &\ll \sum_{\substack{Y/\kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d-v') \frac{d}{qs^2} \frac{Y}{K^2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, dl, dkx)| + \\ &+ O \left(\sum_{\substack{Y/\kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d-v') \frac{d}{qs^2} \frac{Y}{TK^2} \sum_{k=1}^q \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dkx) \right| \right) + \frac{T}{q} \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^q \sum_{\substack{Y/\kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d-v') O(R_j(kx)). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{Y/\kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d-v') \frac{d}{qs^2} \frac{Y}{K^2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, dl, dkx)|, \quad (5.27)$$

$$\Sigma_2 = O \left(\sum_{\substack{Y/\kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d-v') \frac{d}{qs^2} \frac{Y}{TK^2} \sum_{k=1}^q \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dkx) \right| \right), \quad (5.28)$$

$$\Sigma_j = \frac{T}{q} \sum_{k=1}^q \sum_{\substack{Y/\kappa_1 \leq d \leq Y}} \delta_{\alpha_1}(d-v') O(R_{j-3}(kx)), \quad j = 3, 4, 5, 6. \quad (5.29)$$

Следовательно,

$$\mathfrak{S} \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \sum_{j=3}^6 \Sigma_j,$$

Подставляя оценки из формул (5.39), (5.53), (5.55), (5.62), (5.64), (5.69), получаем что число решений системы (5.21) не превосходит

$$\mathfrak{S} \ll_{\epsilon} \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} q^{-1/2+\epsilon} + \frac{1}{T} \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} q^{-1/2+\epsilon} + T q^{1+\epsilon} Y^{3/2+\epsilon}. \quad (5.30)$$

Полагая

$$T = \left\lceil \frac{Y^{1/4}}{K q^{3/4}} \right\rceil + 1, \quad (5.31)$$

и учитывая, что $Y > K^4 q^3$, получаем формулу (5.20). Для того, чтобы завершить доказательство теоремы нам необходимо оценить каждую величину Σ_j , $j = 1, \dots, 6$.

1. Оценим Σ_1 .

Lemma 5.1. *Справедлива следующая оценка*

$$\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, dl, dkx)| \ll_{\epsilon} (q, dx)^{1/2} q^{5/2+\epsilon} d^{1+\epsilon} \quad (5.32)$$

для $\forall \epsilon > 0$.

Доказательство. Применяя к $|K_s(\pm q, dl, dkx)|$ лемму 4.1 и используя замечание 4.1, получим, что для $\forall \epsilon > 0$ выполнено

$$|K_s(\pm q, dl, dkx)| \leq s^\epsilon(q, s)^\epsilon (qdl, qdkx, d^2lkx, s)^{1/2} \sqrt{s}. \quad (5.33)$$

Ввиду того, что $s = qd$, имеем

$$(qdl, qdkx, d^2lkx, s) = (sl, skx, d^2lkx, s) = (d^2lkx, qd) = d(dlkx, q).$$

Тогда из (5.33) следует, что

$$|K_s(\pm q, dl, dkx)| \leq d^\epsilon q^\epsilon (dlkx, q)^{1/2} \sqrt{sd}. \quad (5.34)$$

Подставляя (5.34) в (5.32), получим

$$\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, dl, dkx)| \leq d^\epsilon q^\epsilon d \sqrt{q} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (dlkx, q)^{1/2}. \quad (5.35)$$

Обозначим $\alpha = (q, dx)$ и $q_1 = \frac{q}{\alpha}$. Тогда $(dlkx, q) = \alpha(kl, q_1)$ и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (dlkx, q)^{1/2} = \alpha^{1/2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (kl, q_1)^{1/2}. \quad (5.36)$$

Оценим сумму из правой части (5.36). Для $\forall \epsilon > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (kl, q_1)^{1/2} &\leq \sum_{\gamma|q_1} \gamma^{1/2} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \delta_\gamma(kl) = \\ &= \sum_{\gamma|q_1} \gamma^{1/2} \sum_{\gamma_1|\gamma} \sum_{k=1}^q \delta_{\gamma_1}(k) \sum_{l=1}^q \delta_{\gamma/\gamma_1}(l) \leq \sum_{\gamma|q_1} \gamma^{1/2} \sum_{\gamma_1|\gamma} \frac{q^2}{\gamma} = q^2 \sum_{\gamma|q_1} \frac{\sigma_0(\gamma)}{\gamma^{1/2}} \ll_\epsilon q^{2+\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в (5.36), получаем

$$\sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q (dlkx, q)^{1/2} = (q, dx)^{1/2} q^{2+\epsilon}. \quad (5.38)$$

Подставляя (5.38) в (5.35), получаем утверждение леммы. \square

Используя лемму 5.1 докажем следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Справедлива следующая оценка*

$$\Sigma_1 \ll_\epsilon \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} q^{-1/2+\epsilon} \quad (5.39)$$

для $\forall \epsilon > 0$.

Доказательство. Подставляя (5.32) в (5.27) и учитывая, что $s = qd$, получаем:

$$\Sigma_1 \ll_\epsilon \frac{Y}{K^2} q^{-1/2+\epsilon} \sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v')(q, dx)^{1/2} d^\epsilon. \quad (5.40)$$

Из определения (5.22) получаем, что $(q, dx) = \alpha_1(\frac{q}{\alpha_1}, d)$, следовательно

$$\Sigma_1 \ll_{\epsilon} \frac{Y^{1+\epsilon}}{K^2} q^{-1/2+\epsilon} \alpha_1^{1/2} \sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \left(\frac{q}{\alpha_1}, d \right)^{1/2}. \quad (5.41)$$

Преобразуем сумму из правой части (5.41)

$$\sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \left(\frac{q}{\alpha_1}, d \right)^{1/2} \leq \sum_{\gamma | \frac{q}{\alpha_1}} \gamma^{1/2} \sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \delta_{\gamma}(d). \quad (5.42)$$

Оценим сумму из правой части (5.42).

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \delta_{\gamma}(d) &= \sum_{\frac{Y}{\gamma \kappa_1} \leq d \leq \frac{Y}{\gamma}} \delta_{\alpha_1}(d\gamma - v') = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{\frac{Y}{\gamma \kappa_1} \leq d \leq \frac{Y}{\gamma}} \sum_{n=1}^{\alpha_1} e\left(\frac{d\gamma - v'}{\alpha_1} n\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \sum_{n=1}^{\alpha_1} e\left(\frac{-v'}{\alpha_1} n\right) \sum_{\frac{Y}{\gamma \kappa_1} \leq d \leq \frac{Y}{\gamma}} e\left(\frac{n\gamma}{\alpha_1} d\right). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Оценивая правую часть (5.43) по модулю, имеем

$$\sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \delta_{\gamma}(d) \leq \frac{1}{\alpha_1} \sum_{n=1}^{\alpha_1} \left| \sum_{\frac{Y}{\gamma \kappa_1} \leq d \leq \frac{Y}{\gamma}} e\left(\frac{n\gamma}{\alpha_1} d\right) \right|. \quad (5.44)$$

Обозначим $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{(\gamma, \alpha_1)}$ и $\tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{(\gamma, \alpha_1)}$. Тогда $\frac{n\gamma}{\alpha_1} = \frac{n\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}_1}$, $(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_1) = 1$ и

$$\sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \delta_{\gamma}(d) \leq \frac{(\gamma, \alpha_1)}{\alpha_1} \sum_{n=1}^{\tilde{\alpha}_1} \left| \sum_{\frac{Y}{\gamma \kappa_1} \leq d \leq \frac{Y}{\gamma}} e\left(\frac{n\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}_1} d\right) \right|. \quad (5.45)$$

Для дальнейших преобразований нам потребуется следующее утверждение, доказанное Н.М. Коробова [15, гл. 1, §1 лемма 1, лемма 3]. Пусть Q —целое и P —натуральное, пусть q —произвольное натуральное число, $1 \leq a < q$ и $(a, q) = 1$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^q \left| \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e\left(\frac{na}{q} x\right) \right| \leq P + q \log q. \quad (5.46)$$

Применяя (5.46) к (5.45), получаем:

$$\sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \delta_{\gamma}(d) \leq \frac{(\gamma, \alpha_1)}{\alpha_1} \left(\frac{Y}{\gamma} + \tilde{\alpha}_1 \log \tilde{\alpha}_1 \right). \quad (5.47)$$

Докажем, что $Y \geq \gamma \tilde{\alpha}_1 \log \tilde{\alpha}_1$. Действительно, из формулы (5.42) заключаем, что $\gamma \leq \frac{q}{\alpha_1}$. Следовательно, используя очевидную оценку $\tilde{\alpha}_1 \leq q$, получаем, что достаточно проверить справедливость неравенства: $Y \geq q \log q$, которое выполнено по

условию. Теперь формула (5.47) принимает следующий вид:

$$\sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \delta_{\gamma}(d) \ll \frac{Y(\gamma, \alpha_1)}{\gamma \alpha_1}. \quad (5.48)$$

Подставляя (5.48) в (5.42), получаем:

$$\sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \left(\frac{q}{\alpha_1}, d \right)^{1/2} \ll \frac{Y}{\alpha_1} \sum_{\gamma | \frac{q}{\alpha_1}} \frac{(\gamma, \alpha_1)}{\gamma^{1/2}}. \quad (5.49)$$

Применяя (5.49) в (5.41), получаем:

$$\Sigma_1 \ll_{\epsilon} \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} q^{-1/2+\epsilon} \alpha_1^{-1/2} \sum_{\gamma | \frac{q}{\alpha_1}} \frac{(\gamma, \alpha_1)}{\gamma^{1/2}}. \quad (5.50)$$

Оценим сумму из правой части (5.50)

$$\sum_{\gamma | \frac{q}{\alpha_1}} \frac{(\gamma, \alpha_1)}{\gamma^{1/2}} \leq \sum_{\beta | \alpha_1} \beta \sum_{\gamma | \frac{q}{\alpha_1}} \frac{1}{\gamma^{1/2}} \delta_{\beta}(\gamma) = \sum_{\beta | (\frac{q}{\alpha_1}, \alpha_1)} \beta^{1/2} \sigma_{-1/2} \left(\frac{q}{\beta \alpha_1} \right) \ll_{\epsilon} \alpha_1^{1/2} q^{\epsilon}. \quad (5.51)$$

Подставляя (5.51) в (5.50), получаем:

$$\Sigma_1 \leq \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} q^{-1/2+\epsilon}. \quad (5.52)$$

Лемма доказана. \square

2. Оценим Σ_2 . Из определения Σ_1 и Σ_2 , а так же из формулы (5.39) получаем:

$$\Sigma_2 \ll_{\epsilon} \frac{1}{T} \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} q^{-1/2+\epsilon}. \quad (5.53)$$

3. Оценим Σ_3 . Подставляя в определение Σ_3 выражение для $R_0(kx)$ из (4.20), получим:

$$\Sigma_3 = O \left(\frac{T}{q} \sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \frac{1}{qs} \sum_{k=1}^q \left| \sum_{l=1}^q K_s(\pm q, dl, dkx) \right| \right) = O \left(\Sigma_1 \frac{TK^2}{Y} \right). \quad (5.54)$$

Аналогично тому как была получена оценка суммы Σ_1 , получаем:

$$\Sigma_3 \ll_{\epsilon} TY^{1+\epsilon} q^{-1/2+\epsilon}. \quad (5.55)$$

4. Оценим Σ_4 . Подставляя в определение Σ_4 выражение для $R_1(kx)$ из (4.21), получим:

$$\Sigma_4 = O \left(\frac{T}{q^3} \sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \frac{1}{|m|} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, m + dl, dk)| \right). \quad (5.56)$$

Применяя к $|K_s(\pm q, m + dl, dkx)|$ лемму 4.1 и используя замечание 4.1, получим, что для $\forall \epsilon > 0$ выполнено

$$|K_s(\pm q, m + dl, dkx)| \ll_{\epsilon} s^{\epsilon}(q, s)^{\epsilon}(q(m + dl), qdkx, (m + dl)dkx, s)^{1/2}\sqrt{s}. \quad (5.57)$$

Ввиду того, что $s = qd$, имеем

$$(q(m + dl), qdkx, (m + dl)dkx, s) \leq (qm + sl, skx, s) = (qm, qd) = q(m, d).$$

Тогда из (5.57) следует, что

$$|K_s(\pm q, dl, dkx)| \ll_{\epsilon} d^{\epsilon} q^{\epsilon}(m, d)^{1/2}\sqrt{sq}. \quad (5.58)$$

Подставляя (5.58) в (5.56), получаем:

$$\Sigma_4 = O \left(\frac{T}{q^3} \sum_{\substack{Y \\ \kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') q^2 d^{1/2+\epsilon} q^{1+\epsilon} \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \frac{(m, d)^{1/2}}{|m|} \right). \quad (5.59)$$

Оценим сумму из правой части (5.59).

$$\begin{aligned} \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \frac{(m, d)^{1/2}}{|m|} &\ll \sum_{0 < m \leq s} \frac{(m, d)^{1/2}}{m} \leq \sum_{\beta|d} \beta^{1/2} \sum_{0 < m \leq s} \frac{1}{m} \delta_{\beta}(m) \leq \\ &\leq \sum_{\beta|d} \beta^{-1/2} \log \frac{s}{\beta} \ll_{\epsilon} d^{\epsilon} q^{\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

для $\forall \epsilon > 0$. Применяя оценку (5.60) к (5.59), получим:

$$\Sigma_4 \ll_{\epsilon} T q^{\epsilon} \sum_{\substack{Y \\ \kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') d^{1/2+\epsilon}. \quad (5.61)$$

Использование тривиальной оценки правой части дает

$$\Sigma_4 \ll_{\epsilon} T q^{\epsilon} Y^{3/2+\epsilon}. \quad (5.62)$$

5. Оценим Σ_5 . Подставляя в определение Σ_5 выражение для $R_2(kx)$ из (4.22), получим:

$$\Sigma_5 = O \left(\frac{T}{q^2} \sum_{\substack{Y \\ \kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \frac{1}{|n|} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, dl, n + dkx)| \right). \quad (5.63)$$

Совершенно аналогично тому, как была получена оценка (5.62), получаем:

$$\Sigma_5 \ll_{\epsilon} T q^{1+\epsilon} Y^{3/2+\epsilon}. \quad (5.64)$$

6. Оценим Σ_6 . Подставляя в определение Σ_6 выражение для $R_3(kx)$ из (4.23), получим:

$$\Sigma_6 = O \left(\frac{T}{q^2} \sum_{\substack{Y \\ \kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \frac{1}{|mn|} \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q |K_s(\pm q, m + dl, n + dkx)| \right). \quad (5.65)$$

Применяя к $|K_s(\pm q, m + dl, n + dkx)|$ лемму 4.1 и используя замечание 4.1, получим, что для $\forall \epsilon > 0$ выполнено

$$|K_s(\pm q, m + dl, n + dkx)| \ll_{\epsilon} d^{\epsilon} q^{\epsilon} (m, n, d)^{1/2} \sqrt{sq}. \quad (5.66)$$

Подставляя (5.66) в (5.65), получаем:

$$\Sigma_6 \ll_{\epsilon} \frac{T}{q^2} \sum_{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y} \delta_{\alpha_1}(d - v') q^2 d^{1/2+\epsilon} q^{1+\epsilon} \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \frac{(m, n, d)^{1/2}}{|mn|}. \quad (5.67)$$

Оценим сумму из правой части (5.67).

$$\begin{aligned} & \sum'_{-s/2 < m \leq s/2} \sum'_{-s/2 < n \leq s/2} \frac{(m, n, d)^{1/2}}{|mn|} \ll \sum_{0 < m \leq s} \sum_{0 < n \leq s} \frac{(m, n, d)^{1/2}}{mn} = \\ & = \sum_{\beta|d} \beta^{1/2} \sum_{0 < m \leq s} \sum_{0 < n \leq s} \frac{1}{mn} \delta_{\beta}((m, n)) \leq \sum_{\beta|d} \beta^{1/2} \sum_{0 < m \leq s/\beta} \sum_{0 < n \leq s/\beta} \frac{1}{\beta^2 mn} \leq \\ & \leq \sum_{\beta|d} \beta^{-3/2} \log^2 \frac{s}{\beta} \ll_{\epsilon} s^{\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

для $\forall \epsilon > 0$. Подставляя (5.68) в (5.67), получаем

$$\Sigma_6 \ll_{\epsilon} T q^{1+\epsilon} Y^{3/2+\epsilon}. \quad (5.69)$$

Тем самым мы полностью завершили доказательство теоремы. \square

Remark 5.1. Используя суммы из замечания 4.2, можно доказать, что при $Y > K^4 q^6$ справедлива следующая оценка мощности множества \mathfrak{M} :

$$|\mathfrak{M}| \leq \frac{Y^{2+\epsilon}}{K^2} \frac{q^{\epsilon}}{q} (q, v)^{1/2} \quad (5.70)$$

Однако, использование оценки (5.20) дает лучшую итоговую оценку на δ в теореме 1.2. Это объясняется зависимостью оценки (5.70) от вектора $\eta' = (u, v)^t$.

6 Оценки тригонометрических сумм.

Определим тригонометрическую сумму $S_N(\theta)$ следующим образом

$$S_N(\theta) = \sum_{\gamma \in \Omega_N} e(\theta \|\gamma\|), \quad (6.1)$$

где Ω_N – особое множество матриц (ансамбль), построенное в [3, глава II]. В [3, §7] было доказано, что для доказательства теоремы 1.2 достаточно получить следующую оценку

$$\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta \ll \frac{1}{N} |\Omega_N|^2. \quad (6.2)$$

В данном параграфе мы приведем результаты из [3, §14], необходимые для доказательства оценки (6.2).

Из теоремы Дирихле следует, что для любого $\theta \in [0, 1]$ найдутся $a, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие что:

$$\theta = \frac{a}{q} + \beta, (a, q) = 1, 0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}, \beta = \frac{K}{N}, |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}, \quad (6.3)$$

причем $a = 0$ или $a = q$ возможно только при $q = 1$. Обозначим

$$P_{Q_1, Q}^{(\beta)} = \left\{ \theta = \frac{a}{q} + \beta \mid (a, q) = 1, 0 \leq a \leq q, Q_1 \leq q \leq Q \right\}. \quad (6.4)$$

Для каждого q из $Q_1 \leq q \leq Q$ определим каким-либо способом число a_q , такое что $(a_q, q) = 1, 0 \leq a_q \leq q$. Обозначим

$$Z^* = \left\{ \theta = \frac{a_q}{q} + \beta \mid Q_1 \leq q \leq Q \right\}. \quad (6.5)$$

Положим также

$$Q_0 = \max \left\{ \exp \left(\frac{10^5 A^4}{\epsilon_0^2} \right), \exp(\epsilon_0^{-5}) \right\}, \quad \bar{K} = \max\{1, |K|\}. \quad (6.6)$$

Lemma 6.1. Если $\bar{K}^2 Q^3 \leq \frac{N^{1-\epsilon_0}}{12000 A^4}$, $\bar{K} Q \geq Q_0$, то имеет место оценка

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \bar{K}^{12\epsilon_0} Q^{20\epsilon_0} \frac{\bar{K}^{4(1-\delta)} Q^{6(1-\delta)+1}}{\bar{K} Q_1^2} \quad (6.7)$$

Lemma 6.2. Если $\bar{K}^2 q^2 \leq \frac{N^{1-\epsilon_0}}{12000 A^4}$, $\bar{K} q \geq Q_0$, то имеет место оценка

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| (\bar{K} q)^{6\epsilon_0} \frac{(\bar{K} q)^{2(1-\delta)}}{\bar{K}^{1/2} q}. \quad (6.8)$$

Lemma 6.3. Если $\bar{K} q \geq Q_0$, то имеет место оценка

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| \frac{(\bar{K} q)^{2\epsilon_0} N^{1-\delta+\epsilon_0}}{\bar{K} q}. \quad (6.9)$$

Lemma 6.4. Пусть выполнены неравенства $N^{\epsilon_0/2} \leq Q^{1/2} \leq Q_1 \leq Q$, $\bar{K} Q \leq N^\alpha$, причем $\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{2} + \epsilon_0$, тогда имеет место оценка

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| \left(N^{1/2+\alpha/2-\delta+3\epsilon_0} Q + N^{1-\delta+3\epsilon_0} \frac{Q^{1/2}}{\bar{K}} \right). \quad (6.10)$$

Сформулируем еще одну лемму общего характера, доказанную в [3, §12] Похожее утверждение использовалось С.В. Конягиным в [16, следствие 17].

Lemma 6.5. Пусть W – произвольное, конечное подмножество отрезка $[0, 1]$ и $|W| > 10$. Пусть $f : W \rightarrow \mathbb{R}_+$ – произвольная функция такая, что для любого подмножества $Z \subseteq W$ выполнена оценка

$$\sum_{\theta \in Z} f(\theta) \leq c_1 |Z|^{1/2} + c_2,$$

где c_1, c_2 – неотрицательные константы, не зависящие от множества Z . Тогда справедлива оценка

$$\sum_{\theta \in W} f^2(\theta) \ll c_1^2 \log |W| + c_2 \max_{\theta \in W} f(\theta) \quad (6.11)$$

с абсолютной константой в знаке Виноградова.

7 «Случай $\mu = 2$.»

Данный параграф соответствует параграфу 15 в [3] и поэтому носит такое же название. Наша цель – передоказать леммы из [3, §15], заменяя в них лемму 1.1 на теорему 5.1 (нумерация утверждений соответствует настоящей работе). Пусть $Z \subseteq P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ и $\bar{K} = \max\{1, |K|\}$. Для полноты изложения приведем результаты из [3], которые понадобятся нам при доказательстве леммы 7.2.

Theorem 7.1. ([3, теорема 11.4.]) Пусть $M^{(2)} \geq (M^{(1)})^{2\epsilon_0}$, а неравенство (7.1)

$$\exp\left(\frac{10^5 A^4}{\epsilon_0^2}\right) \leq M \leq N \exp\left(-\frac{10^5 A^4}{\epsilon_0^2}\right), \quad (7.1)$$

выполнено при $M = M^{(1)}$ и $M = M^{(1)} M^{(2)}$. Тогда ансамбль Ω_N может быть представлен в виде $\Omega_N = \Omega^{(1)} \Omega^{(2)} \Omega^{(3)}$, и для любых $\gamma_1 \in \Omega^{(1)}$, $\gamma_2 \in \Omega^{(2)}$, $\gamma_3 \in \Omega^{(3)}$ справедливы неравенства

$$\frac{M^{(2)}}{150 A^2 (M^{(1)})^{2\epsilon_0}} \leq \|\gamma_2\| \leq 73 A^2 \frac{(M^{(2)})^{1+2\epsilon_0}}{(M^{(1)})^{2\epsilon_0}}, \quad (7.2)$$

$$\frac{N}{150 A^2 (M^{(1)} M^{(2)})^{1+2\epsilon_0}} \leq \|\gamma_3\| \leq \frac{73 A^2 N}{M^{(1)} M^{(2)}}. \quad (7.3)$$

Будем записывать числа $\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ следующим образом:

$$\theta^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} + \beta, \quad \theta^{(2)} = \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} + \beta. \quad (7.4)$$

Обозначим

$$\mathfrak{M}(g_3) = \left\{ (g_2^{(1)}, g_2^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \Omega^{(2)} \times \Omega^{(2)} \times Z^2 \mid (7.6) \text{ и } (7.7) \text{ выполнены} \right\} \quad (7.5)$$

где

$$|g_2^{(1)} g_3 - g_2^{(2)} g_3|_{1,2} \leq \frac{73 A^2 N}{M^{(1)} \bar{K}}, \quad (7.6)$$

$$\left\| g_2^{(1)} g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(2)} g_3 \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} = 0. \quad (7.7)$$

Lemma 7.1. Пусть выполнены условия теоремы 7.1 и на ее основе построено разложение Ω_N в виде $\Omega_N = \Omega^{(1)}\Omega^{(2)}\Omega^{(3)}$. Пусть $M^{(1)}$ такое, что для любых $\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in Z$ выполнено

$$[q^{(1)}, q^{(2)}] < \frac{M^{(1)}}{74A^2\overline{K}}. \quad (7.8)$$

Тогда имеет место оценка

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll (M^{(1)})^{1+2\epsilon_0} |\Omega^{(1)}|^{1/2} \sum_{g_3 \in \tilde{\Omega}^{(3)}} |\mathfrak{M}(g_3)|^{1/2}. \quad (7.9)$$

где $\tilde{\Omega}^{(3)} = \Omega^{(3)}(0, 1)^t$.

Lemma 7.2. Если, выполнены неравенства

$$\overline{K}^{5+28\epsilon_0} Q^{5+21\epsilon_0} < N^{1-\epsilon_0}, \quad \overline{K}Q \geq Q_0, \quad (7.10)$$

то имеет место оценка

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \frac{\overline{K}^{10(1-\delta)} Q^{10(1-\delta)+1} \overline{K}^{60\epsilon_0} Q^{60\epsilon_0}}{\overline{K}^2 Q_1^{1/2}}. \quad (7.11)$$

Доказательство. Доказательство леммы 7.2 практически не отличается от доказательства леммы 15.1. из [3], за исключением замены леммы 1.1 на теорему 5.1 и другого выбора параметров $M^{(1)}, M^{(2)}$. Используя тривиальную оценку

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \leq Q \sum_{Q_1 \leq q \leq Q} \max_{1 \leq a \leq q, (a, q)=1} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 = Q \sum_{\theta \in Z^*} |S_N(\theta)|^2, \quad (7.12)$$

где в качестве a_q выбраны числители, на которых достигается максимум, получаем, что достаточно доказать неравенство

$$\sum_{\theta \in Z^*} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \frac{\overline{K}^{10(1-\delta)} Q^{10(1-\delta)+1} \overline{K}^{60\epsilon_0} Q^{60\epsilon_0}}{\overline{K}^2 Q_1^{1/2}}. \quad (7.13)$$

Пусть $Z \subseteq Z^*$ –любое подмножество. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N по теореме 7.1. Положим:

$$M^{(1)} = 75A^2\overline{K}Q^2, \quad M^{(2)} = (75A^2\overline{K}^4Q^3)^{1+7\epsilon_0}, \quad (7.14)$$

тогда выполнено условие (7.8) и все условия теоремы 7.1. Следовательно, выполнены все условия леммы 7.1 и значит имеет место оценка (7.9). Аналогично тому, как это было сделано в [3, лемме 14.1.], из (7.7) получаем: $q^{(1)} = q^{(2)} = \mathbf{q}$ и, следовательно, $a^{(1)} = a^{(2)}$. Тогда соотношения (7.6) и (7.7) дают:

$$\left| (g_2^{(1)} - g_2^{(2)})g_3 \right|_{1,2} \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}\overline{K}}, \quad \left((g_2^{(1)} - g_2^{(2)})g_3 \right)_{1,2} \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}, \quad (7.15)$$

Положим:

$$\eta' = g_2^{(2)} g_3, \eta = g_3, \gamma = g_2^{(1)}, X = \|\eta'\|, Y = \|g_2^{(2)}\|, K_1 = \bar{K} \frac{X M^{(1)}}{73 A^2 N}. \quad (7.16)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|g_2^{(1)}\| \leq \|g_2^{(2)}\|$, тогда $\|\gamma\| \leq Y$. Из свойств ансамбля так же следует, что $\|\gamma\| \asymp Y$. Кроме того, из теоремы 7.1 следует, что

$$\frac{\bar{K}}{(M^{(1)})^{4\epsilon_0} (M^{(2)})^{2\epsilon_0}} \ll K_1 \ll \bar{K} \frac{(M^{(2)})^{2\epsilon_0}}{(M^{(1)})^{2\epsilon_0}}, \quad \frac{(M^{(2)})}{(M^{(1)})^{2\epsilon_0}} \ll Y \ll \frac{(M^{(2)})^{1+2\epsilon_0}}{(M^{(1)})^{2\epsilon_0}}, \quad (7.17)$$

Соотношения (7.15) могут быть записаны в следующем виде:

$$|\gamma\eta - \eta'|_{1,2} < \frac{X}{K_1}, \quad (\gamma\eta - \eta')_{1,2} \equiv 0 \pmod{q}. \quad (7.18)$$

Проверим выполнены ли условия теоремы 5.1. Для этого достаточно убедиться, что $Y < X$, $K_1^4 Q^3 < Y$, то есть – проверить, что

$$\bar{K}^4 Q^3 < (M^{(2)})^{1-8\epsilon_0} (M^{(1)})^{6\epsilon_0}. \quad (7.19)$$

Неравенства (7.19) выполнены в силу выбора параметров $M^{(1)}, M^{(2)}$. Таким образом для оценки мощности множества $\mathfrak{M}(g_3)$ может быть применена теорема 5.1 следующим образом. Фиксируем $g_2^{(2)}$ любым из $|\Omega^{(2)}|$ способов. Так же фиксируем $\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}}$ любым из $|Z|$ способов. По доказанному, этим определено $\frac{a^{(2)}}{q^{(2)}}$. Следовательно, при фиксированном g_3 получаем:

$$|\mathfrak{M}(g_3)| \ll \frac{Y^2 (YQ)^{\epsilon_0}}{K_1^2 Q_1^{1/2}} |\Omega^{(2)}| |Z|$$

Используя оценки (7.17), получаем:

$$|\mathfrak{M}(g_3)| \ll \frac{(M^{(2)})^{2+8\epsilon_0} (M^{(1)})^{4\epsilon_0} (\bar{K}Q)^{5\epsilon_0}}{\bar{K}^2 Q_1^{1/2}} |\Omega^{(2)}| |Z| \ll \frac{\bar{K}^8 Q^6 \bar{K}^{98\epsilon_0} Q^{80\epsilon_0}}{\bar{K}^2 Q_1^{1/2}} |\Omega^{(2)}| |Z|. \quad (7.20)$$

Подставляя (7.20) в (7.9), получаем:

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll |Z|^{1/2} (M^{(1)})^{1+2\epsilon_0} |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(3)}| |\Omega^{(2)}|^{1/2} \frac{\bar{K}^4 Q^3 \bar{K}^{49\epsilon_0} Q^{40\epsilon_0}}{\bar{K} Q_1^{1/4}}. \quad (7.21)$$

Используя оценки $|\Omega^{(1)}| \geq (M^{(1)})^{\delta-2\epsilon_0}$, $|\Omega^{(2)}| \geq (M^{(2)})^{\delta-2\epsilon_0}$, доказанные в [3, §11], получаем:

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll |Z|^{1/2} |\Omega_N| \frac{(M^{(1)})^{1-\delta+2,5\epsilon_0} \bar{K}^4 Q^3 \bar{K}^{49\epsilon_0} Q^{40\epsilon_0}}{(M^{(2)})^{\delta-\epsilon_0/2} \bar{K} Q_1^{1/4}}. \quad (7.22)$$

Подставляя (7.14) в (7.22), получаем:

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll |Z|^{1/2} |\Omega_N| \frac{\bar{K}^{5(1-\delta)} Q^{5(1-\delta)} \bar{K}^{30\epsilon_0} Q^{30\epsilon_0}}{\bar{K} Q_1^{1/4}}. \quad (7.23)$$

Применяя лемму 6.5 с $W = Z^*$, $c_2 = 0$, $f(\theta) = \frac{|S_N(\theta)|}{|\Omega_N|}$, получаем (7.13). Лемма доказана. \square

Lemma 7.3. Если выполнено неравенство $\bar{K}q > Q_0$, то имеет место оценка

$$|S_N(\theta)| \ll_{A, \epsilon_0} |\Omega_N| \frac{\bar{K}^{-5(1-\delta)} q^{4(1-\delta)} \bar{K}^{30\epsilon_0} q^{24\epsilon_0}}{\bar{K} q^{1/4}}. \quad (7.24)$$

Доказательство. Положим $Z = \{\theta\}$ и

$$M^{(1)} = 75A^2 \bar{K}q, \quad M^{(2)} = (75A^2 \bar{K}^4 q^3)^{1+7\epsilon_0}. \quad (7.25)$$

тогда выполнено условие (7.8) из леммы 7.1. Предположим, что справедливо неравенство

$$\bar{K}^{-5+34\epsilon_0} q^{4+26\epsilon_0} < N, \quad (7.26)$$

тогда выполнены все условия теоремы 7.1, а, следовательно, и все условия леммы 7.1. Значит имеет место оценка (7.9). Далее мы будем использовать обозначения (7.16). Проверка выполнимости условий теоремы 5.1 проводится аналогично. Тем самым для оценки мощности множества $\mathfrak{M}(g_3)$ может быть применена теорема 5.1:

$$|\mathfrak{M}(g_3)| \ll \frac{(M^{(2)})^{2+8\epsilon_0} (M^{(1)})^{4\epsilon_0} (\bar{K}q)^{5\epsilon_0}}{\bar{K}^2 q^{1/2}} |\Omega^{(2)}| \ll \bar{K}^6 q^{5,5} \bar{K}^{98\epsilon_0} q^{76\epsilon_0} |\Omega^{(2)}|. \quad (7.27)$$

Подставляя (7.27) в (7.9), получаем

$$|S_N(\theta)| \ll (M^{(1)})^{1+2\epsilon_0} |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(3)}| |\Omega^{(2)}|^{1/2} \bar{K}^3 q^{11/4} \bar{K}^{49\epsilon_0} q^{38\epsilon_0} \quad (7.28)$$

Аналогично тому как были получены формулы (7.22) и (7.23) приходим к оценке

$$|S_N(\theta)| \ll_A |\Omega_N| \frac{\bar{K}^{-5(1-\delta)} q^{4(1-\delta)} \bar{K}^{30\epsilon_0} q^{24\epsilon_0}}{\bar{K} q^{1/4}}. \quad (7.29)$$

Пусть теперь неравенство (7.26) не выполнено, то есть

$$N \leq \bar{K}^{-5+34\epsilon_0} q^{4+26\epsilon_0}, \quad (7.30)$$

тогда выполнены условия леммы 6.3 и учитывая (7.30), получаем

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| \frac{\bar{K}^{-5(1-\delta)} q^{4(1-\delta)} \bar{K}^{30\epsilon_0} q^{24\epsilon_0}}{\bar{K} q}. \quad (7.31)$$

Лемма доказана. \square

8 Оценка интегралов от $|S_N(\theta)|^2$.

Доказательство теоремы 1.2 схоже с доказательством теоремы 1.1 в [3]. Нам понадобится ряд лемм из [3, §16], которые мы приведем без доказательства.

Lemma 8.1. Имеет место неравенство

$$\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta \leq \frac{1}{N} \sum_{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}}^* \int_{|K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK, \quad (8.1)$$

где \sum^* означает сумму по взаимно простым a и q при $q \geq 1$, и $a = 0, 1$ при $q = 1$.

Напомним, что

$$Q_0 = \max \left\{ \exp \left(\frac{10^5 A^4}{\epsilon_0^2} \right), \exp(\epsilon_0^{-5}) \right\}.$$

Lemma 8.2. *Имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta &\leq 2Q_0^2 \frac{|\Omega_N|^2}{N} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\substack{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK + \\ \frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq Q_0 \\ \frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}}^* \int \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK &+ \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \end{aligned} \quad (8.2)$$

Оценим сначала третий из интегралов в правой части (8.2). Нам будет удобно далее использовать следующие обозначения:

$$\gamma = 1 - \delta, \quad \xi_1 = N^{2\gamma+6\epsilon_0}. \quad (8.3)$$

Из [3, лемма 16.2, лемма 16.3] следует следующее утверждение.

Lemma 8.3. *При $\gamma < \frac{1}{8}$ и $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{1000})$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ |K| \leq \frac{Q_0}{q}}}^* \int \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (8.4)$$

Оценим второй из интегралов в правой части (8.2).

Lemma 8.4. *При $\gamma < \frac{1}{12}$ и $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{1000})$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq Q_0 \\ \frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}}^* \int \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (8.5)$$

Доказательство. Обозначим через I интеграл в левой части (8.5). Применяя лемму 7.3, получаем

$$I \ll |\Omega_N|^2 q^{8\gamma - \frac{1}{2} + 48\epsilon_0} \int_{\substack{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}} \bar{K}^{10\gamma - 2 + 60\epsilon_0} dK \ll |\Omega_N|^2 q^{\frac{1}{6} + 48\epsilon_0}, \quad (8.6)$$

в силу выбора параметра γ . Суммируя (8.6) по $0 \leq a \leq q \leq Q_0$, получаем (8.5). Лемма доказана. \square

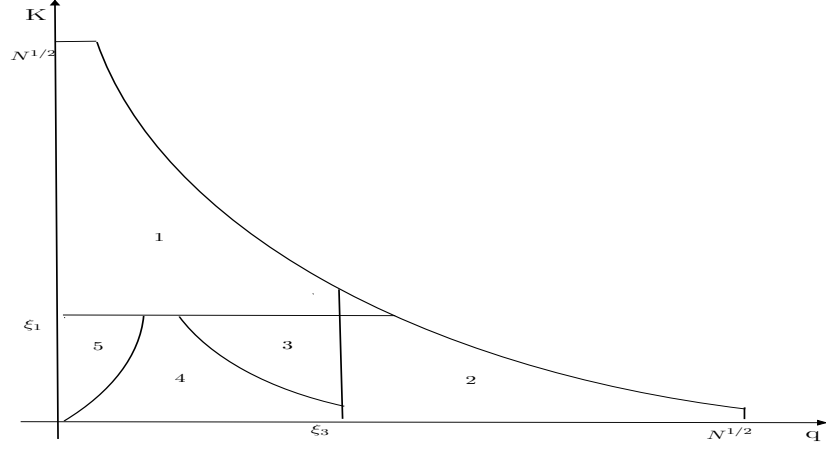
Нам осталось оценить первый интеграл из правой части (8.2), то есть

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\substack{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \quad (8.7)$$

Этому будут посвящены последующие леммы. Обозначим

$$\xi_3 = N^{4\gamma+15\epsilon_0}. \quad (8.8)$$

Мы разобьем область суммирования и интегрирования по q, K на пять подобластей см рис.



области 1 соответствует лемма 8.5, области 2 – лемма 8.7, области 3 – лемма 8.8, области 4 – лемма 8.9, области 5 – лемма 8.10.

Леммы 8.5 – 8.7, следующие далее, также были доказаны в [3, §16].

Lemma 8.5. При $\gamma \leq \frac{27-\sqrt{633}}{16} - 5\epsilon_0$, $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\xi_1 \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (8.9)$$

Пусть

$$c_1 = c_1(N), \quad c_2 = c_2(N), \quad Q_0 \leq c_1 < c_2 \leq N^{1/2},$$

и пусть

$$f_1 = f_1(N, q), \quad f_2 = f_2(N, q), \quad \frac{Q_0}{q} \leq f_1 < f_2 \leq \frac{N^{1/2}}{q},$$

$$m_1 = \min\{f_1(N, N_j), f_1(N, N_{j+1})\}, \quad m_2 = \max\{f_2(N, N_j), f_2(N, N_{j+1})\}.$$

Lemma 8.6. Если функции $f_1(N, q), f_2(N, q)$ монотонны по q , то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{c_1 \leq q \leq c_2 \\ 1 \leq a \leq q}}^* \int_{f_1 \leq |K| \leq f_2} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \leq \\ & \leq \sum_{j: c_1^{1-\epsilon_0} \leq N_j \leq c_2} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Lemma 8.7. При $\gamma \leq \frac{27-\sqrt{633}}{16} - 5\epsilon_0$, $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > N^{4\gamma+14\epsilon_0}}}^* \int_{\substack{Q_0 \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (8.11)$$

Во всех последующих леммах для упрощения записи обозначим $Q_1 = N_j, Q = N_{j+1}$. Используя соотношения из [3, лемма 9.1.], получаем:

$$\frac{Q}{Q_1} \leq Q^{\epsilon_0} \leq N^{\epsilon_0/2}, \quad c_1^{1-\epsilon_0} \leq Q_1 \leq c_2, \quad c_1 \leq Q \leq c_2^{1+2\epsilon_0}.$$

Мы будем далее использовать эти оценки без ссылок на них. Напомним, что $\overline{K} = \max\{1, |K|\}$. Заметим, что у нас всегда будет выполнено $m_2 \geq 1$, поэтому при $\eta < 1$ имеем:

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \frac{dK}{\overline{K}^\eta} \ll m_2^{1-\eta}. \quad (8.12)$$

При $\eta > 1$ всегда выполнено:

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \frac{dK}{\overline{K}^\eta} < \frac{1}{m_1^{\eta-1}}. \quad (8.13)$$

Однако, если $m_1 \leq 1$, то при $\eta > 1$ имеем:

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \frac{dK}{\overline{K}^\eta} \ll 1. \quad (8.14)$$

Lemma 8.8. При $\gamma \leq \frac{1}{12} - 4\epsilon_0$ и $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{1000})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_3 \\ q > \xi_3/\xi_1}}^* \int_{\substack{\xi_3 \leq |K| \leq \xi_1}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (8.15)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 8.6 с

$$c_1 = N^{2\gamma+9\epsilon_0}, \quad c_2 = \xi_3, \quad f_1 = \frac{\xi_3}{q}, \quad f_2 = \xi_1, \quad m_1 = \frac{\xi_3}{Q}, \quad m_2 = \xi_1.$$

Оценивая $|S_N(\frac{a}{q} + \frac{K}{N})|$ через максимум по a, q , получаем

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 \leq \max_{\substack{Q_1 \leq q \leq Q \\ 1 \leq a \leq q, (a,q)=1}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right| \sum_{\substack{Q_1 \leq q \leq Q \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|. \quad (8.16)$$

Заметим, что $KQ \leq \xi_1^{1+2\epsilon_0} \xi_3 \leq N^{1/2}$, поэтому, применяя лемму 6.3 для оценки максимума и лемму 6.4 с $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем:

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 \left(\frac{N^{2\gamma-1/4+6\epsilon_0} Q}{(\overline{K} Q_1)^{1-2\epsilon_0}} + N^{2\gamma+5\epsilon_0} \frac{Q^{1/2}}{\overline{K}^{2-2\epsilon_0} Q_1^{1-2\epsilon_0}} \right). \quad (8.17)$$

Используя (8.12) при интегрировании по K первого слагаемого и (8.13) при интегрировании второго, получаем:

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll |\Omega_N|^2 \left(N^{2\gamma-1/4+8\epsilon_0} \frac{Q}{Q_1} + \frac{N^{2\gamma+6\epsilon_0}}{\xi_3^{1-2\epsilon_0}} \xi_3^{1/2} \right).$$

подставляя значения ξ_3 из (8.8) и используя условие на γ , получаем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll |\Omega_N|^2 N^{-0,1\epsilon_0}. \quad (8.18)$$

Поскольку количество слагаемых в сумме по j в (8.10) превосходит $\log \log N$, то

$$\sum_{j: c_1^{1-\epsilon_0} \leq N_j \leq c_2 m_1 \leq |K| \leq m_2} \int \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll |\Omega_N|^2.$$

Лемма доказана. □

Обозначим

$$\nu = \frac{3 + \sqrt{61}}{4} = 2,70\dots \quad (8.19)$$

Lemma 8.9. При $\gamma \leq \frac{1}{9+\sqrt{61}} - 4\epsilon_0$ и $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{1000})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_3 \\ q > Q_0}}^* \int_{\substack{Q_0 \leq |K| \leq \min\{q^\nu, \frac{\xi_3}{q}\}}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (8.20)$$

Доказательство. Эта лемма доказывается совершенно аналогично лемме 16.12 из [3, §16]. Необходимо лишь проверить условия леммы 6.1 (в нумерации данной статьи), которая использовалась в доказательстве леммы 16.12 из [3, §16]

$$\overline{K}^2 Q^3 \leq \xi_3^3 \leq N^{1-1,5\epsilon_0}.$$

Лемма доказана. □

Lemma 8.10. При $\gamma \leq \frac{1}{9+\sqrt{61}} - 8\epsilon_0$ и $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{1000})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1^{1/\nu} \\ q > Q_0}}^* \int_{q^\nu \leq |K| \leq \xi_1} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (8.21)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 8.6 с

$$c_1 = Q_0, c_2 = \xi_1^{1/\nu}, f_1 = q^\nu, f_2 = \xi_1, m_1 = Q_1^\nu, m_2 = \xi_1.$$

Проверим, что выполнены условия леммы 7.2. Для этого достаточно проверить, что $\overline{K}^{5+35\epsilon_0} Q^{5+35\epsilon_0} < N$, то есть, что

$$(\xi_1 \xi_1^{1/\nu})^{5+40\epsilon_0} < N,$$

Последнее неравенство выполнено ввиду условий на γ, ϵ_0 . Применяя лемму 7.2 и учитывая, что $\frac{Q}{Q_1} \leq Q^{\epsilon_0}$, получаем:

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 \overline{K}^{10\gamma-2+60\epsilon_0} Q^{10\gamma+\frac{1}{2}+61\epsilon_0}. \quad (8.22)$$

Используя (8.13) при интегрировании по K , получаем:

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK &\ll |\Omega_N|^2 Q^{10\gamma+\frac{1}{2}+61\epsilon_0} Q_1^\nu (10\gamma-1+60\epsilon_0) \leq \\ &\leq |\Omega_N|^2 Q^{10\gamma+\frac{1}{2}+61\epsilon_0+\nu(10\gamma-1+60\epsilon_0)+3\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Для того чтобы сумма по j была ограничена константой достаточно потребовать

$$10(1+\nu)\gamma + \frac{1}{2} - \nu + 230\epsilon_0 \leq -0, 1\epsilon_0 \Rightarrow \gamma \leq \frac{\nu - 1/2}{10(1+\nu)} - 8\epsilon_0 = \frac{1}{9+\sqrt{61}} - 8\epsilon_0$$

Последнее же неравенство выполнено ввиду условий на γ . Лемма доказана. \square

9 Доказательство теоремы 1.2.

Пусть $\gamma < \frac{1}{9+\sqrt{61}}$. Выбираем ϵ_0 так, чтобы $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{1000})$ и $\gamma \leq \frac{1}{9+\sqrt{61}} - 8\epsilon_0$. Тогда из лемм 8.5–8.10 следует, что и первый интеграл из правой части (8.2) меньше чем $\frac{|\Omega_N|^2}{N}$, то есть

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\substack{Q_0 \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (9.1)$$

. Подставляя (9.1) и результаты лемм 8.3–8.4 в лемму 8.2, получаем

$$\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N} \quad \text{при} \quad \gamma \leq \frac{1}{9+\sqrt{61}} - 8\epsilon_0, \epsilon_0 \in (0, \frac{1}{1000}) \quad (9.2)$$

Таким образом нами доказано неравенство (6.2), что, как показано в [3, §7], достаточно для доказательства теоремы 1.1. Теорема доказана.

10 Функция Гуда и теорема Кусика

Как известно, можно по-другому подойти к определению величины $\delta_{\mathcal{A}}$. Для этого следует фиксировать алфавит \mathcal{A} вида

$$\{1, 2, \dots, A-1, A\} \quad (10.1)$$

и рассмотреть следующие величины и параметры. Через $V_{\mathcal{A}}(k)$ обозначим множество слов длины k

$$V_{\mathcal{A}}(k) = \left\{ (d_1, d_2, \dots, d_k) \mid 1 \leq d_j \leq A, j = 1, \dots, k \right\},$$

а через $V_{\mathcal{A}} = \bigcup_{k \geq 1} V_{\mathcal{A}}(k)$ – множество всех конечных слов. Далее для каждого слова $D = (d_1, d_2, \dots, d_k) \in V_{\mathcal{A}}(k)$ берется его континуант $\langle D \rangle = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle$ (т.е. знаменатель цепной дроби $[d_1, \dots, d_k]$) и для каждого $s > 0$ рассматривается сумма

$$\zeta_k(s, \mathcal{A}) = \sum_{D \in V_{\mathcal{A}}(k)} \langle D \rangle^{-s}. \quad (10.2)$$

Наконец, из этих сумм составляется ряд

$$\zeta(s, \mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(s, \mathcal{A}), \quad (10.3)$$

называемый ζ – функцией Гуда, сходящийся или расходящийся в зависимости от величины s . Точная нижняя грань тех значений s , при которых ряд (10.3) сходится, называется абсциссой сходимости этого ряда.

Уточняя результаты Гуда [8], Кусик ([9], [10], [11]) доказал теорему о том, что эта абсцисса сходимости равна $2\delta_{\mathcal{A}}$, где, напомним, \mathcal{A} имеет вид (10.1).

Хотя для произвольного алфавита \mathcal{A} аналогичное свойство не известно, тем не менее, можно надеяться, что оно когда-нибудь будет доказано. Для нас, однако, абсцисса сходимости ряда (10.3) важна уже сама по себе, независимо от того, как именно она связана с понятием хаусдорфовой размерности. Дело в том, что следующая ниже теорема 11.2, обобщающая результат Хенсли для алфавитов вида (10.1), играет важную роль в построении ансамбля Ω_N . Отметим, что в [2] аналог теоремы 11.2 доказан с помощью спектральной теории. Однако наше доказательство теоремы 11.2 требует определения параметра $\delta_{\mathcal{A}}$ из (1.5) через абсциссу сходимости. Итак, по определению, ряд

$$\zeta(s, \mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{D \in V_{\mathcal{A}}(k)} \langle D \rangle^{-s} \quad (10.4)$$

- при всех $s > 2\delta_{\mathcal{A}}$ – сходится,
- при $0 < s < 2\delta_{\mathcal{A}}$ – расходится,

чем и определяется величина $\delta_{\mathcal{A}}$. Ситуация, когда $s = 2\delta_{\mathcal{A}}$, будет рассмотрена ниже в §11 (забегая вперед, скажем, что ряд (10.4) расходится и при $s = 2\delta_{\mathcal{A}}$; это свойство будет для нас важно).

11 Метод Хенсли

Прежде чем выяснять, каково количество континуантов, не превосходящих N , полезно разобраться с вопросом о том, сколь много существует цепных дробей, знаменатель которых не превосходит N . (Несмотря на схожесть вопросов, в ответе на второй из них каждый континуант должен учитываться вместе со своей кратностью.) Для алфавита \mathcal{A} вида (10.1) решение этого вопроса содержится в следующей теореме Хенсли [6].

Theorem 11.1. (Хенсли [6]) Для действительных $x \geq 1$, для алфавита \mathcal{A} вида (10.1) имеет место соотношение

$$\# \left\{ D \in V_{\mathcal{A}} \mid \langle D \rangle \leq x \right\} \asymp x^{2\delta_{\mathcal{A}}}. \quad (11.1)$$

Остаток данного параграфа нужен для того, чтобы перейти от алфавита \mathcal{A} вида (10.1) к общему случаю. Обобщение этой теоремы Хенсли на случай произвольного алфавита основано на обобщении его же метода: нужно лишь переписать его доказательство в других обозначениях, иногда упрощая выкладки. К реализации этого плана и приступаем.

Рассмотрим произвольный алфавит \mathcal{A} , для которого, как всегда, $|\mathcal{A}| \geq 2$, и вернемся к обозначениям §10. Определим для $0 \leq s \leq 2, k \in \mathbb{N}$ функцию $g_{\mathcal{A}}(k, s)$, положив

$$g_{\mathcal{A}}(k, s) = \log \zeta_k(s, \mathcal{A}) - \log 2. \quad (11.2)$$

Будем также писать $g(k)$ вместо $g_{\mathcal{A}}(k, s)$, если параметры s и \mathcal{A} ясны из контекста.

Lemma 11.1. Для $s \in [0, 2], j, k, r \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$|g(j+k) - (g(j) + g(k))| \leq \log 2, \quad (11.3)$$

$$|g(rj) - rg(j)| \leq (r-1) \log 2, \quad (11.4)$$

$$\left| \frac{g(r)}{r} - g(1) \right| \leq \log 2. \quad (11.5)$$

Доказательство. Ввиду неравенства

$$\langle D \rangle \langle B \rangle \leq \langle D, B \rangle \leq 2 \langle D \rangle \langle B \rangle, \quad (11.6)$$

имеем:

$$2^{-s} \sum_{D \in V_{\mathcal{A}}(j)} \langle D \rangle^{-s} \sum_{B \in V_{\mathcal{A}}(k)} \langle B \rangle^{-s} \leq \sum_{D \in V_{\mathcal{A}}(j)} \sum_{B \in V_{\mathcal{A}}(k)} \langle D, B \rangle^{-s} \leq \sum_{D \in V_{\mathcal{A}}(j)} \langle D \rangle^{-s} \sum_{B \in V_{\mathcal{A}}(k)} \langle B \rangle^{-s}, \quad (11.7)$$

или, в терминах функции $\zeta_k(s, \mathcal{A})$ из (10.2),

$$2^{-s} \zeta_j(s, \mathcal{A}) \zeta_k(s, \mathcal{A}) \leq \zeta_{j+k}(s, \mathcal{A}) \leq \zeta_j(s, \mathcal{A}) \zeta_k(s, \mathcal{A}). \quad (11.8)$$

Так как $s \leq 2$, то $2^{-s} \geq \frac{1}{4}$. Поэтому, логарифмируя неравенство (11.8) и переходя к функции $g(k)$, получаем неравенство (11.3). Обобщая его на случай $r \geq 2$ слагаемых индукцией по r , получаем:

$$\left| g \left(\sum_{n=1}^r j_n \right) - \sum_{n=1}^r g(j_n) \right| \leq (r-1) \log 2 \quad (11.9)$$

В частности, при $j_1 = \dots = j_r = j$ получаем неравенство (11.4). Наконец, подставляя в доказанное неравенство (11.4) значение $j = 1$ и производя деление на r , получаем неравенство (11.5). \square

Определим теперь функции $L(s, \mathcal{A})$ и $M(s, \mathcal{A})$ для $s \in [0, 2]$, положив:

$$L(s, \mathcal{A}) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} g(r), \quad (11.10)$$

$$M(s, \mathcal{A}) = \liminf_{r \rightarrow \infty} r^{-1} g(r). \quad (11.11)$$

Корректность определения этих функций уже установлена в неравенстве (11.5).

Lemma 11.2. *Функции $L(s, \mathcal{A})$ и $M(s, \mathcal{A})$ непрерывны по s на отрезке $[0, 2]$ и для всех натуральных r удовлетворяют неравенству*

$$-\log 2 + rL(s, \mathcal{A}) \leq g(r) \leq rM(s, \mathcal{A}) + \log 2. \quad (11.12)$$

Доказательство. Докажем сначала нижнюю из оценок в (11.12). Для этого предположим противное: пусть для некоторых $j \geq 1$ и $\epsilon > 0$ выполнено неравенство

$$g(j) \leq j(L(s, \mathcal{A}) - \epsilon) - \log 2. \quad (11.13)$$

Тогда, ввиду (11.4), для любого $r \geq 1$ получаем:

$$g(rj) \leq rg(j) + (r-1)\log 2 \leq rj(L(s, \mathcal{A}) - \epsilon) - \log 2. \quad (11.14)$$

Но любое $m \in \mathbb{N}$ представимо в виде $m = rj + t$, $0 \leq t < j$. Следовательно, ввиду неравенств (11.3) и (11.14),

$$\begin{aligned} g(m) &= g(rj + t) \leq g(rj) + g(t) + \log 2 \leq rj(L(s, \mathcal{A}) - \epsilon) + g(t) = \\ &= m(L(s, \mathcal{A}) - \epsilon) + g(t) - t(L(s, \mathcal{A}) - \epsilon). \end{aligned} \quad (11.15)$$

Так как t принимает лишь конечное число значений, то при $m \rightarrow \infty$ получаем:

$$g(m) \leq m(L(s, \mathcal{A}) - \epsilon'), \quad \epsilon' > 0, \quad (11.16)$$

что противоречит определению функции $L(s, \mathcal{A})$ равенством (11.10), и нижняя оценка в (11.12) доказана. Ввиду очевидной симметрии формул, верхняя из оценок в (11.12) доказывается полностью аналогично.

Используя доказанное неравенство (11.12), получаем, что для любого r

$$M(s, \mathcal{A}) \leq L(s, \mathcal{A}) \leq M(s, \mathcal{A}) + \frac{2}{r} \log 2,$$

что при $r \rightarrow \infty$ дает:

$$L(s, \mathcal{A}) = M(s, \mathcal{A}). \quad (11.17)$$

Поэтому достаточно доказать непрерывность только функции $L(s, \mathcal{A})$. Предположим противное: пусть найдутся $\sigma \in [0, 2]$, $\epsilon > 0$ и последовательность $s_i \mapsto \sigma$, такая что $0 \leq s_i \leq 2$ и

$$|L(s_i, \mathcal{A}) - L(\sigma, \mathcal{A})| > \epsilon. \quad (11.18)$$

Ввиду равенства (11.17), неравенство (11.12) можно записать в форме

$$|r^{-1} g_{\mathcal{A}}(r, s) - L(s, \mathcal{A})| \leq r^{-1} \log 2. \quad (11.19)$$

Рассматривая неравенство (11.19) для любого фиксированного $r > \frac{4 \log 2}{\epsilon}$ при $s = s_i$ для $i = 1, 2, \dots$ или $s = \sigma$, получаем:

$$|r^{-1}g_{\mathcal{A}}(r, \sigma) - L(\sigma, \mathcal{A})| \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad |r^{-1}g_{\mathcal{A}}(r, s_i) - L(s_i, \mathcal{A})| \leq \frac{\epsilon}{4}. \quad (11.20)$$

Теперь из неравенств (11.18) и (11.20) с помощью неравенства треугольника выводится неравенство

$$r^{-1}|g_{\mathcal{A}}(r, s_i) - g_{\mathcal{A}}(r, \sigma)| > \frac{\epsilon}{2}, \quad (11.21)$$

противоречащее непрерывности $g_{\mathcal{A}}(r, s)$ по s . Этим доказана непрерывность $L(s, \mathcal{A})$. \square

Lemma 11.3. *Существует положительная функция $\lambda(s, \mathcal{A})$, непрерывная по s и строго убывающая при $0 \leq s \leq 2$, такая что:*

$$\lambda(0, \mathcal{A}) = |\mathcal{A}|, \quad (11.22)$$

$$\lambda(2, \mathcal{A}) \leq 1, \quad (11.23)$$

$$\lambda(s, \mathcal{A}) = \lim_{r \rightarrow \infty} (\zeta_r(s, \mathcal{A}))^{\frac{1}{r}}, \quad (11.24)$$

$$\left| \log \lambda(s, \mathcal{A}) - r^{-1} \log \frac{\zeta_r(s, \mathcal{A})}{2} \right| \leq r^{-1} \log 2, \quad (11.25)$$

$$\lambda(2\delta_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) = 1; \quad (11.26)$$

кроме того, выполнено соотношение

$$\lim_{s \rightarrow 2\delta_{\mathcal{A}}+0} \zeta(s, \mathcal{A}) = +\infty \quad (11.27)$$

Доказательство. Положим

$$\lambda(s, \mathcal{A}) = \exp(L(s, \mathcal{A})). \quad (11.28)$$

Тогда положительность $\lambda(s, \mathcal{A})$ очевидна, а непрерывность следует из непрерывности $L(s, \mathcal{A})$, доказанной в лемме 11.2. Неравенство (11.25) представляет собой записанное в других терминах неравенство (11.19). Из неравенства (11.25) легко получить, что

$$\zeta_r(s, \mathcal{A}) \asymp (\lambda(s, \mathcal{A}))^r, \quad (11.29)$$

откуда сразу следует формула (11.24). Из последней тривиально следует (11.22): при $s = 0$ все слагаемые в сумме (10.2) равны единице.

Далее, из (11.29) видно, что ряд $\zeta(s, \mathcal{A})$ сходится тогда и только тогда, когда $\lambda(s, \mathcal{A}) < 1$. Поэтому равенство (11.26) выполнено по определению числа $\delta_{\mathcal{A}}$ через абсциссу сходимости. Поскольку, ввиду (11.29), по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$\zeta(s, \mathcal{A}) \asymp (1 - \lambda(s, \mathcal{A}))^{-1},$$

то неравенство (11.27) также доказано.

Докажем убывание $\lambda(s, \mathcal{A})$ по s . Для этого рассмотрим неравенство

$$\langle D \rangle \geq \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{r-1}, \quad (11.30)$$

выполненное для всех $D \in V_{\mathcal{A}}(r)$, поскольку

$$\langle D \rangle \geq \underbrace{\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle}_r. \quad (11.31)$$

Поэтому для любого фиксированного $\epsilon > 0$, для всех достаточно больших r , из $D \in V_{\mathcal{A}}(r)$ следует

$$\langle D \rangle^{-(s+\epsilon)} \leq \langle D \rangle^{-s} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{-\epsilon(r-1)} \leq \frac{1}{10} \langle D \rangle^{-s}$$

Следовательно, ввиду (10.2),

$$\log \zeta_r(s, \mathcal{A}) - \log \zeta_r(s + \epsilon, \mathcal{A}) \geq \log 10.$$

Ввиду (11.25), применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} \log \lambda(s, \mathcal{A}) - \log \lambda(s + \epsilon, \mathcal{A}) &\geq r^{-1}(\log \zeta_r(s, \mathcal{A}) - \log \zeta_r(s + \epsilon, \mathcal{A})) - \\ &- \left| \log \lambda(s, \mathcal{A}) - r^{-1} \log \frac{\zeta_r(s, \mathcal{A})}{2} \right| - \left| \log \lambda(s + \epsilon, \mathcal{A}) - r^{-1} \log \frac{\zeta_r(s + \epsilon, \mathcal{A})}{2} \right| \geq \\ &\geq r^{-1} \log 10 - 2r^{-1} \log 2 > 0, \end{aligned}$$

что доказывает убывание $\lambda(s, \mathcal{A})$ по s .

Осталось доказать неравенство (11.23). Пусть

$$A = \max \mathcal{A} \quad (11.32)$$

–наибольший элемент алфавита \mathcal{A} , тогда рассмотрим алфавит $\mathcal{A}' = 1, 2, \dots, A$. Из сопоставления слагаемых в суммах $\zeta_r(s, \mathcal{A})$ и $\zeta_r(s, \mathcal{A}')$ очевидно следует неравенство $\delta_{\mathcal{A}} \leq \delta_{\mathcal{A}'}$. Но неравенство $2\delta_{\mathcal{A}'} < 2$ было доказано Хенсли [6, стр.375-377, лемма 1]. Следовательно, $2\delta_{\mathcal{A}} < 2$, и из убывания функции $\lambda(s, \mathcal{A})$ получаем:

$$\lambda(2, \mathcal{A}) < \lambda(2\delta_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) = 1.$$

□

Договоримся далее рассматривать в алфавите \mathcal{A} слова только четной длины (состоящие из четного числа букв). Можно взглянуть на такие слова чуть иначе, представив себе, что они составлены из букв алфавита $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, то есть из пар вида (a, b) , где $a, b \in \mathcal{A}$. Обозначим алфавит $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ через \mathcal{A}^2 , а множество слов четной длины в алфавите \mathcal{A} – через $V_{\mathcal{A}^2}$. Для алфавита \mathcal{A}^2 теперь необходимо ввести ряд объектов, таких как множество конечных цепных дробей $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}$ (то есть, множество конечных цепных дробей от последовательностей из $V_{\mathcal{A}^2}$), функцию Гуда

$$\zeta(s, \mathcal{A}^2) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{D \in V_{\mathcal{A}^2}(2r)} \langle D \rangle^{-s} \quad (11.33)$$

и ее абсциссу сходимости $2\delta_{\mathcal{A}^2}$.

Remark 11.1. Из равенств (11.24) и (11.26) следует, что $2\delta_{\mathcal{A}^2} = 2\delta_{\mathcal{A}}$, так как предел сходящейся последовательности равен пределу по ее подпоследовательности четных индексов. По тем же причинам равенство (11.27) остается верным при замене \mathcal{A} на \mathcal{A}^2 .

Положим также

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}(N) = \left\{ D \in V_{\mathcal{A}^2} \mid \langle D \rangle \leq N \right\},$$

$$F_{\mathcal{A}}(x) = \# \left\{ D \in V_{\mathcal{A}^2} \mid \langle D \rangle \leq x \right\} = \# \mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}(x),$$

и пусть $D_{\mathcal{A}^2}(N)$ – множество знаменателей для дробей из $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}(N)$.

Theorem 11.2. Пусть $\delta_{\mathcal{A}} > \frac{1}{2}$, тогда для любого $x \geq 4A^2$ выполнено:

$$\frac{1}{32A^4} x^{2\delta_{\mathcal{A}}} \leq F_{\mathcal{A}}(x) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{4A^2}\right) \leq F_{\mathcal{A}}(x) \leq 8x^{2\delta_{\mathcal{A}}}; \quad (11.34)$$

Доказательство. Докажем сначала верхнюю оценку в (11.34). Для этого установим оценку

$$F_{\mathcal{A}}(x) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{2}\right) \leq 4x^{2\delta_{\mathcal{A}}}, \quad (11.35)$$

откуда нужное неравенство будет следовать тривиально.

Фиксируем действительное $x \geq 4A^2$ и рассмотрим множество последовательностей D из $V_{\mathcal{A}^2}$, таких что $\langle D \rangle > x$, скажем,

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_{2r}\}. \quad (11.36)$$

Каждая такая последовательность D может быть единственным образом записана в виде $D = (E, F)$, или

$$\{d_1, d_2, \dots, d_{2r}\} = \{e_1, e_2, \dots, e_{2k}, f_1, f_2, \dots, f_{2j}\}, \quad (11.37)$$

так чтобы выполнялось неравенство

$$\langle E \rangle \leq x < \langle E, f_1, f_2 \rangle. \quad (11.38)$$

Оценим континуант $\langle E, f_1, f_2 \rangle$ снизу. Ввиду (11.6), имеем:

$$\langle E, f_1, f_2 \rangle \geq \langle E \rangle \langle f_1, f_2 \rangle \geq 2\langle E \rangle, \quad (11.39)$$

поскольку

$$\langle f_1, f_2 \rangle = f_1 f_2 + 1 \geq 2.$$

Поэтому неравенство (11.38) гарантированно следует из неравенства

$$\frac{x}{2} < \langle E \rangle \leq x.$$

Следовательно, для любого $s > 2\delta_{\mathcal{A}}$ имеем:

$$\begin{aligned} \zeta(s, \mathcal{A}^2) &= \sum_{D \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle D \rangle^{-s} \geq \sum_{D \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle D \rangle^{-s} \mathbf{1}_{\{\langle D \rangle > x\}} \geq \\ &\geq \sum_{F \in V_{\mathcal{A}^2}} \sum_{E \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle E, F \rangle^{-s} \mathbf{1}_{\{\frac{x}{2} < \langle E \rangle \leq x\}}, \end{aligned} \quad (11.40)$$

где, здесь и далее,

$$\mathbf{1}_{\{S\}} = \begin{cases} 1, & \text{если условие } S \text{ выполнено;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11.41)$$

Применяя верхнюю из оценок (11.6) и используя условие $s \leq 2$, продолжим цепочку неравенств (11.40):

$$\zeta(s, \mathcal{A}^2) \geq \frac{1}{4} \sum_{F \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle F \rangle^{-s} \sum_{E \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle E \rangle^{-s} \mathbf{1}_{\{\frac{x}{2} < \langle E \rangle \leq x\}} \geq \frac{1}{4} \zeta(s, \mathcal{A}^2) x^{-s} \left(F_{\mathcal{A}}(x) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{2}\right) \right),$$

откуда, деля обе части на $\zeta(s, \mathcal{A}^2)$ при $s > 2\delta_{\mathcal{A}}$, получаем:

$$F_{\mathcal{A}}(x) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{2}\right) \leq 4x^s$$

Ввиду произвольности числа s , такого что $s > 2\delta_{\mathcal{A}}$, доказано неравенство (11.35). Применяя неравенство (11.35), при $\delta_{\mathcal{A}} > \frac{1}{2}$ получаем:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{A}}(x) &\leq \sum_{k \geq 0} \left(F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{2^k}\right) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right) \leq \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{2^k}\right)^{2\delta_{\mathcal{A}}} \leq 4x^{2\delta_{\mathcal{A}}} \frac{1}{1 - 2^{-1}} \leq 8x^{2\delta_{\mathcal{A}}}, \end{aligned}$$

и оценка (11.34) доказана.

Докажем теперь нижнюю оценку в (11.34). Снова возьмем произвольное $x \geq 4A^2$ и рассмотрим те $D \in V_{\mathcal{A}^2}$, для которых $\langle D \rangle > x$, и пусть D будет, как в (11.36). Поскольку, ввиду неравенства (11.6),

$$\langle E, f_1, f_2 \rangle \leq 2\langle E \rangle \langle f_1, f_2 \rangle < 4\langle E \rangle A^2,$$

то неравенство (11.38) можно продолжить влево:

$$\frac{x}{4A^2} < \langle E \rangle \leq x.$$

Учтем также замечание 11.1, согласно которому $\zeta(s, \mathcal{A}^2) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow 2\delta_{\mathcal{A}} + 0$. Следовательно, для такого s имеем:

$$\begin{aligned} \zeta(s, \mathcal{A}^2) &= (1 + o(1)) \sum_{D \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle D \rangle^{-s} \mathbf{1}_{\{\langle D \rangle > x\}} \leq \\ &\leq 2 \sum_{E \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle E \rangle^{-s} \mathbf{1}_{\{\frac{x}{4A^2} < \langle E \rangle \leq x\}} \sum_{F \in V_{\mathcal{A}^2}} \langle F \rangle^{-s}, \end{aligned} \quad (11.42)$$

где последний множитель — сумма по F — возник ввиду нижней из оценок (11.6), примененной к континуанту $\langle D \rangle$:

$$\langle D \rangle = \langle E, F \rangle \geq \langle E \rangle \langle F \rangle.$$

Заменяя $\langle E \rangle^{-1}$ на $\left(\frac{x}{4A^2}\right)^{-1}$, получаем:

$$1 \leq 2 \left(\frac{x}{4A^2}\right)^{-s} \left(F_{\mathcal{A}}(x) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{4A^2}\right) \right),$$

откуда, ввиду неравенства $s = 2\delta_{\mathcal{A}} + 0 \leq 2$,

$$F_{\mathcal{A}}(x) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{4A^2}\right) \geq \frac{1}{2(4A^2)^2} x^s > \frac{1}{32A^4} x^{2\delta_{\mathcal{A}}}.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

- [1] ZAREMBA S. K. La méthode des "bons treillis" pour le calcul des intégrales multiples. In Applications of number theory to numerical analysis, pages 39-119. Academic Press, New York, 1972.
- [2] J. BOURGAIN, A. KONTOROVICH. On Zaremba's conjecture, preprint available at arXiv:1107.3776(2011).
- [3] ФРОЛЕНКОВ Д. А., КАН И. Д. Усиление теоремы Бургейна-Конторовича.
- [4] J. BOURGAIN, A. KONTOROVICH AND P. SARNAK. Sector estimates for hyperbolic isometries. GAFA, 20(5):1175-1200, 2010.
- [5] D. HENSLEY. The Hausdorff dimensions of some continued fraction cantor sets, J. Number Theory 33(2) (1989), 182-198.
- [6] D. HENSLEY. The distribution of badly approximable numbers and continuants with bounded digits. Theorie des nombres (Quebec, PQ, 1987), 371-385, de Gruyter, Berlin, 1989.
- [7] D. HENSLEY. The Distribution of badly approximable rationals and continuants with bounded digits II. J. Number Theory 34:3 (1990), 293-334.
- [8] GOOD I. J. The fractional dimension theory of continued fractions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37:199-228, 1941.
- [9] CUSIK T. W. Continuants with bounded digits. Mathematika, 24(2)(1977), 166-172.
- [10] CUSIK T. W. Continuants with bounded digits II. Mathematika, 25 (1978):107-109.
- [11] CUSIK T. W. Continuants with bounded digits III. Mathematika, 99:105-109, 1985.
- [12] O. JENKINSON. On the density of Hausdorff dimensions of bounded type continued fraction sets: the Texan conjecture. Stochastics and Dynamics, 4 (2004), 63-76.
- [13] ESTERMANN T. On Kloosterman's sum. – Mathematika, 8 (1961), 83-86.
- [14] УСТИНОВ А. В. О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции. Алгебра и анализ, 20:5 (2008), 186–216.
- [15] КОРОВОВ Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. - М., Наука, 1989.
- [16] КОНЯГИН С. В. Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и сумм Гаусса.
- [17] MOSHCHEVITIN N. On some open problems in diophantine approximation.